Structures décidables maximales

Alexis Bès et Patrick Cégielski

LACL, Université Paris 12

Introduction

- Sujet : frontière décidable/indécidable pour les théories de structures logiques
- S.Grigorieff, Décidabilité et complexité des théories logiques, Collection Didactique, vol. 8, INRIA, 1991, p.7-97.

Logique du premier ordre

- $\mathfrak{L}$ un langage
- $\mathfrak{M}$ une $\mathfrak{L}$-structure
- $FO(\mathfrak{M})$: ensemble des énoncés φ du 1er ordre tels que $\mathfrak{M} \models \varphi$
- $FO(\mathfrak{M})$ est *décidable* si le problème "$\mathfrak{M} \models \varphi$?" est décidable
  Exemples : $FO(\mathbb{N}; +)$ est décidable, $FO(\mathbb{N}; +, \times)$ ne l'est pas
- Si $\mathfrak{M} = (D; \dots)$ et $R \subseteq D^n$, on dit que R est (FO-)*définissable dans* $\mathfrak{M}$ s'il existe une $\mathfrak{L}$-formule $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ du 1er ordre telle que

$$R = \{(a_1, \dots, a_n) \in D^n \mid M \models \varphi(a_1, \dots, a_n)\}.$$

  Exemple : $x \leq y$ est définissable dans $(\mathbb{N}; +)$ par la formule $\exists z(x + z = y)$

Logique du second-ordre monadique

- Extension de la logique du premier ordre dans laquelle on peut quantifier sur des ensembles d'éléments du domaine
- Formalisme :
  - variables du 1er ordre : $x, y, z, \ldots$
  - variables du 2nd ordre monadique : $X, Y, Z, \ldots$
  - on introduit $x \in X$
- Notation : $MSO(\mathfrak{M})$
- Exemples :
  - $MSO(\mathbb{N}; <)$ décidable (Büchi 1962)
  - $MSO(\mathbb{N}; +)$ indécidable (R.Robinson 1958)
- Second-ordre monadique *faible* : ensembles *finis*

Motivations

Elgot-Rabin (1966)

- Résultats de décidabilité de $MSO(\mathbb{N}; <, P)$ pour certains prédicats P
- Question : étant donnée une structure $\mathfrak{M} = (D; P_1, \ldots, P_k)$ telle que $FO(\mathfrak{M})$ est décidable, peut-on toujours étendre $\mathfrak{M}$ avec un prédicat non définissable R en une structure $\mathfrak{M}' = (D; P_1, \ldots, P_k, R)$ telle que $FO(\mathfrak{M}')$ est décidable ?
- i.e. **existe-t-il des structures décidables maximales ?**

Ordres réguliers

Définition

Un ordre partiel $(B, <)$ est dit *régulier* si pour tout $a \in B$ il existe $b_1, b_2 \in B$ distincts tels que $a < b_1$, $a < b_2$, et aucun élément $c \in B$ ne satisfait à la fois $b_1 < c$ et $b_2 < c$.

Exemples

1. $(\Sigma^*; \prec)$, où Σ alphabet fini à ≥ 2 éléments, et $u \prec v$ si u prefixe de v.
2. $X = \{(X_1, X_2) \mid X_1, X_2 \subseteq \mathbb{N} \text{ finis et disjoints}\}$. L'ordre sur X défini par $(X_1, X_2) < (Y_1, Y_2)$ si $(X_1 \subseteq Y_1$ et $X_2 \subseteq Y_2)$ est régulier : étant donné $a = (X_1, X_2)$, considérer $b_1 = (X_1 \cup \{n\}, X_2)$ et $b_2 = (X_1, X_2 \cup \{n\})$ où $n \notin X_1 \cup X_2$.
3. $(\mathbb{Z}, <)$ n'est pas régulier.

Un critère de non-maximalité

Définition

On dit que $(B, <)$ est *interprétable* dans $\mathfrak{M} = (D; \dots)$ s'il existe $R \subseteq D^n$ et $<_R$ tels que $(B, <) \cong (R, <_R)$, et $<_R$ est définissable dans $\mathfrak{M}$.

Théorème (Soprunov 1988)

- Si un ordre régulier est interprétable dans $\mathfrak{M}$ alors $\mathfrak{M}$ n'est pas maximale.
- Corollaire : pas de structure décidable maximale si on considère la logique du second ordre monadique faible.

Exemples

1. $\mathfrak{M} = (\Sigma^*; \prec, \dots)$ telles que $FO(\mathfrak{M})$ décidable
2. $\mathfrak{M} = (\mathcal{P}_f(\mathbb{N}); \subseteq, \dots)$ telles que $FO(\mathfrak{M})$ décidable

Nouveaux résultats

Bès-Cégielski (2006)

- Nouveau critère de non-maximalité basé sur la distance de Gaifman
- Existence de structures décidables *faiblement maximales*.

Distance de Gaifman

- $\mathfrak{M} = (D; R_1, \ldots, R_n)$ une structure relationnelle.
- Graphe de Gaifman $G(\mathfrak{M})$: graphe non orienté dont les sommets sont les éléments de D et tels qu'il existe une arête entre a et b si a et b figurent dans au moins un $k-$uplet appartenant à l'un des R_i.
- Distance de Gaifman $d_{\mathfrak{M}}$: distance au sens du graphe

Exemples

- si $\mathfrak{M} = (\mathbb{N}; Suc)$, avec $Suc(x, y)$ ssi $y = x + 1$, alors $d_{\mathfrak{M}}(x, y) = |x - y|$;
- si $\mathfrak{M} = (\mathbb{N}; <)$ alors $d_{\mathfrak{M}}(x, y) \leq 1$.

Théorème de Gaifman

- $B_r(x)$: boule de centre x et de rayon r
- $B_r(x_1, \ldots, x_n) = \bigcup_i B_r(x_i)$
- Remarque : la relation $y \in B_r(x)$ est définissable
- Formule locale $\psi^{(r)}(x)$: formule où tous les quantificateurs sont relativisés à $B_r(x)$

Théorème de localité de Gaifman (1982) :

A toute formule $\varphi(\vec{x})$ on peut associer de manière effective une formule équivalente qui est combinaison booléenne de formules de la forme

- $\psi^{(r)}(\vec{x})$
- $\exists x_1 \ldots \exists x_s \ (\bigwedge_{1 \leq i \leq s} \alpha^{(r)}(x_i) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq s} d(x_i, x_j) > 2r)$

avec $s \leq qr(\varphi) + n$ et $r \leq 7^k$.

Un nouveau critère de non-maximalité

Théorème 1

Soit $\mathfrak{M} = (D; R_1, \ldots, R_n)$ une structure infinie dénombrable telle que

- $FO(\mathfrak{M})$ est décidable ;
- tout élément de D est définissable dans $\mathfrak{M}$;
- pour tout ensemble fini $X \subseteq D$ et tout $r \in \mathbb{N}$, il existe $a \in D$ tel que $d_{\mathfrak{M}}(a, X) > r$.

Alors $\mathfrak{M}$ peut être étendue en une structure $\mathfrak{M}' = (D; R_1, \ldots, R_n, R)$ avec

- R non définissable dans $\mathfrak{M}$;
- $FO(\mathfrak{M}')$ est décidable ;
- le diagramme élémentaire de $\mathfrak{M}'$ est calculable.

Exemples

- $\mathfrak{M} = (\mathbb{N}; Suc)$, et $\mathfrak{M} = (\mathbb{N}; Suc, P_1, \ldots, P_n)$ où les P_i sont des prédicats unaires et $FO(\mathfrak{M})$ décidable.
- Toute graphe coloré infini $\mathfrak{M} = (V; E, P_1, \ldots, P_n)$ de degré fini et telle que $FO(\mathfrak{M})$ décidable. Plus généralement toute structure $\mathfrak{M}$ telle que $G(\mathfrak{M})$ est de degré fini et telle que $FO(\mathfrak{M})$ décidable.
- $\mathfrak{M} = (\mathbb{N}; <)$ ne satisfait pas les conditions, de même que toute structure infinie $\mathfrak{M}$ dans laquelle une relation d'ordre total entre les élements est définissable.
- La structure constituée de ω copies de $(\mathbb{N}; <)$ et equipée d'une relation "successeur" entre les copies, i.e. $\mathfrak{M} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}; <, Suc)$ où
  - $(x, y) < (x', y')$ ssi $(x = x'$ et $y < y')$;
  - $Suc((x, y), (x', y'))$ ssi $x' = x + 1$

  satisfait les conditions (et un ordre total infini y est interprétable).

Remarques et problèmes

- La condition liée à $d_{\mathfrak{M}}$ exprime une certaine limitation du pouvoir d'expression de $\mathfrak{M}$ (vs critère Soprunov)
- Problème : étudier le cas des structures de la forme $(\mathbb{N}; <, P_1, \ldots, P_n)$ où les P_i sont unaires (structures qui ne satisfont ni les conditions du Théorème 1 ni les conditions de Soprunov)
- Raffiner la notion de distance de Gaifman
- Problème : complexité de $FO(\mathfrak{M}')$ vs complexité de $FO(\mathfrak{M})$?

Structures décidables faiblement maximales

- Simplifions le problème : existe-t-il des structures décidables maximales vis-à-vis des symboles de constante ?
- Réponse : oui (pour *FO* comme pour *MSO*)

Théorème 2

Il existe une structure $\mathfrak{M}$ telle que $MSO(\mathfrak{M})$ est décidable, et $FO(\mathfrak{M}')$ est indécidable pour toute expansion $\mathfrak{M}'$ de $\mathfrak{M}$ par une constante.

Théorème 3

Cette structure $\mathfrak{M}$ n'est pas maximale !

Idée de la preuve du Théorème 2

- **Idée :** $\mathfrak{M}$ est constituée d'une somme (indexée par $\mathbb{Z}$) de structures de la forme $(\mathbb{N}, <, R)$ (R unaire) parmi lesquelles on cache une structure indécidable.
- **Indécidabilité de FO de toute expansion de $\mathfrak{M}$ par une constante :** vient du fait que la constante permet de localiser (définir) la copie indécidable.
- **Décidabilité de $MSO(\mathfrak{M})$:**
  1. théorème de composition de Shelah ramène l'étude de $MSO(\mathfrak{M})$ à celle de $MSO(\mathbb{Z}; <, R_1, \ldots, R_n)$ où les relations unaires R_i dépendent des théories des différentes copies de $\mathbb{N}$.
  2. la copie indécidable est bien cachée
     $\rightarrow$ "régularité" de $\mathfrak{M}$
     $\rightarrow$ le $\mathbb{Z}-$mot associé à $(\mathbb{Z}; <, R_1, \ldots, R_n)$ est *riche* : tout motif y apparaît une infinité de fois des deux côtés
     $\rightarrow$ $MSO(\mathbb{Z}; <, R_1, \ldots, R_n)$ décidable (Compton)