Introduction à la programmation structurée, illustrée par le langage C

Patrick Cégielski
cegielski@u-pec.fr

Septembre 2016

Pour Irène et Marie

Legal Notice

Université Paris XII - IUT Sénart-Fontainebleau
Route forestière Hurtault
F-77300 Fontainebleau
cegielski@u-pec.fr

Préface

Faisons le point sur les quelques prérequis nécessaires. Nous supposons ici que vous avez eu un premier contact avec un *ordinateur*, plus exactement avec un micro-ordinateur (et même un micro-ordinateur dit compatible PC), ou plus précisément avec un système informatique. Nous supposons en particulier que vous savez utiliser l'*interpréteur de commande* et un *éditeur de texte*, qu'importe lequel.

Table des matières

Chapitre 1

La pensée algorithmique

1.1 Historique

On peut distinguer quatre moments clès dans l'histoire de la notion d'algorithme :

— le contexte, c'est-à-dire les besoins en calculs de plus en plus complexes, depuis la Préhistoire ;

— la présentation des algorithmes, qui a varié au cours de l'Histoire, depuis les Babyloniens jusqu'aux programmes d'ordinateurs ;

— la définition de ce qui peut être résolu algorithmiquement au milieu des années 1930, cristallisée par la thèse de Church-Turing en 1936 ;

— la définition formelle de ce qu'est un algorithme, cristallisée par la thèse de Gurevich en 1984.

Nous allons voir les deux premiers aspects dans ce premier chapitre.

1.1.1 Les besoins en calculs

1.1.1.1 La naissance du calcul arithmétique

<u>Le dénombrement</u>.- Les *entiers naturels* ont été introduits dès la Préhistoire pour *compter*, c'est-à-dire *dénombrer* les ensembles [finis] concrets (de moutons et autres).

FIGURE 1.1 – Appariement sur os de loup ([BJB-76], p. 2)

La première façon de dénombrer consiste à *apparier*, c'est-à-dire à mettre en bijection deux ensembles concrets. Il nous reste très peu de témoignage à cet égard mais Karl ABSOLOM ([Abs-37]) a trouvé en 1937, en Moravie (République Tchèque), un os appartenant à un jeune loup (voir figure 1.1) qui montre une suite de cinquante cinq incisions disposées en deux séries, par groupes de cinq. Cet os fut découvert dans des sédiments datant de 30 000 ans environ.

Apparition du calcul arithmétique.- Lors de la naissance des cités, à la fin du Néolithique, le dénombrement prend une importance considérable, à la fois pour comptabiliser les réserves (communes) et pour déterminer les impôts (servant à déterminer la part de chacun dans l'effort commun). C'est certainement à cette époque qu'apparaissent les quatre opérations arithmétiques (addition, multiplication, soustraction, division) sur les entiers et donc le *calcul*, pour la réalisation de ces tâches, mais il ne nous reste aucun témoignage à cet égard.

Prenons l'exemple de l'addition (des entiers naturels). À cette époque, on ne peut plus se satisfaire de dénombrer les têtes de bétail en les comptant une à une : l'ensemble à dénombrer est trop imposant, d'une part ; on ne peut pas les laisser en place le temps de les compter, d'autre part. Une nouvelle méthode astucieuse apparaît : un fonctionnaire compte celles d'un parc, un autre d'un autre parc et ainsi de suite ; on en fait la somme pour déterminer le nombre de têtes du quartier, puis celui de la cité.

Le fonctionnaire, pour compter les têtes de bétail d'un parc, se contente de mettre un caillou dans une boîte au passage de chaque bête. La boîte est envoyée au quartier, le contenu en est versé dans une boîte plus grande, qui est elle envoyée au cœur de la cité. Là on verse le contenu de toutes les boîtes et on compte le nombre de cailloux, ce qui correspond au nombre recherché.

Cette méthode, dite *du berger*, était encore utilisée à la fin du XIX^e siècle, époque à laquelle les historiens des mathématiques la relevèrent. L'utilisation de cette méthode à la fin du Néolithique fut brillament confirmée par Denise SCHMANDT-BESSERAT en 1979 [1]. La méthode du berger est encore utilisée couramment dans la Rome Antique, d'où l'étymologie du mot *calcul* (cailloux se disant *calculus* en latin).

Numération unaire.- On a vu avec l'os de jeune loup une façon de représenter un nombre : une incision par élément. Cette *représentation unaire* est une avancée considérable par rapport à la méthode du berger. Elle permet de ne pas avoir à déplacer une grande quantité de matière : seulement un os au lieu de tout un troupeau ou d'une boîte de cailloux.

Le principe du groupement.- Si la représentation unaire correspond à une avancée considérable par rapport au transport d'une boîte de cailloux, elle n'est cependant pas très lisible pour des nombres assez grands. La *méthode du groupement* facilite la lecture. On ne connaît pas l'origine de cette façon de faire mais elle est très ancienne puisque nous avons vu le groupement par cinq sur l'os de loup. Tout ce que l'on peut dire c'est que, au cours de l'Histoire, ces groupements se sont fait par deux, cinq, dix, vingt et soixante, quelquefois avec un mélange de ces différentes *bases*.

Apparition des systèmes de numération additifs.- Les **systèmes de numération additifs** possèdent des symboles distincts pour chaque sorte de groupe rencontré durant le processus de dénombrement et ce symbole est répété aussi souvent que nécessaire pour indiquer combien on a besoin de chaque groupe (l'analogue de la numération unaire mais pour les groupes).

1. Denise Schmandt-Besserat ([S-B-79, S-B-92]) montre même que la méthode du berger est à l'origine de l'écriture : au début, de tout petits cailloux sont conservés dans des boules en terre cuite à titre de comptabilité ; ensuite le nombre de cailloux est marqué de façon symbolique sur les boules ; plus tard, les cailloux eux-mêmes n'ayant plus une grande importance (plus exactement étant redondants), on ne les place plus dans les boules qui sont seulement marquées de la suite de symboles ; enfin, les boules elles-mêmes ne sont plus conservées, les nombres étant reportés sur des tablettes d'argile. Des commentaires seront ajoutés ensuite (bœuf ou mouton). D'étape en étape, on en arrive à l'écriture.

Le premier exemple historique qui nous soit parvenu est le système de numération égyptien. Intéressons-nous cependant à un autre système, dont une variante est encore utilisée de nos jours : l'ancien système romain (c'est-à-dire avant l'apparition des formes soustractives IV pour 4 et IX pour 9, ces dernières formes n'apparaissant qu'au Moyen Âge). Il est possible de représenter tout nombre entier inférieur à 5 000 par une suite de symboles (M = 1 000, D = 500, C = 100, X = 10, V = 5 et I = 1) dans laquelle un même symbole apparaît au plus quatre fois : par exemple 2 976 s'écrit MMDCCCCLXXVI. Bien qu'il soit habituel d'écrire les symboles dans l'ordre décroissant des valeurs, ceci n'est pas nécessaire : la valeur d'un symbole dans un système additif n'a rien à voir avec sa position.

Système de numération additif et calculs.- Les systèmes de numération reposant sur le principe de regroupement, non seulement permettent de décrire les nombres de façon concise, mais facilitent également les calculs concernant tout ou partie des quatre opérations arithmétiques.

Les systèmes de numération additifs sont bien adaptés à l'addition et à la multiplication.

Une addition se fait en deux étapes : on écrit les deux nombres l'un en-dessous de l'autre, en positionnant les symboles d'un même groupe du second en-dessous des symboles de ceux du premier ; on additionne puis on met sous forme canonique en utilisant les regroupements. Effectuons, par exemple, la somme de 2 319 et de 821 (comme dans [Wil-85], p. 7) :

```
  2 319 = MM   CCC    X   V IIII
+   821 =    D    CCC  XX       I
---------------------------------
        = MM D CCCCCC XXX V IIIII
        = MM D DC     XXX V V
        = MM DD C XXXX
        = MMM C XXXX              (= 3 140)
```

Effectuer une multiplication est lent mais le principe n'est pas difficile puisqu'on n'a besoin que de mémoriser les multiples de cinq et de dix :

```
  28 = XXVIII
x 12 =    XII

       XXVIII fois I =      XX      V  III
       XXVIII fois I =      XX      V  III
       XXVIII fois X = CC L   XXX
       -------------------------------------
                     = CC L XXXXXXX VV IIIIII
                     = CC L L    XX VV VI
                     = CCC XXX V I            (= 336)
```

Ces systèmes de numération sont moins bien adaptés à la soustraction et à division.

Pour simplifier l'opération de division, par exemple, on a introduit les deux opérations auxiliaires de *médiation* (division par deux) et de *duplication* (multiplication par deux). La division d'effectue alors grâce à un algorithme décrit en général de nos jours dans les cours d'initiation à la programmation (voir exercices).

Apparition du système de numération de position.- Les **systèmes de numération de position** possèdent des symboles, non plus pour les groupes, mais pour les petits nombres. Ces symboles sont appelés **chiffres**. Les groupes de dénombrement, quant à eux, sont entièrement dénotés par la position du chiffre dans la chaîne de caractères dénotant le nombre. On utilise un chiffre nouveau, le chiffre **zéro**, pour dénoter un groupe vide.

Les systèmes de numération de position sont un peu bien moins adaptés à l'addition et à la multiplication [2] (les utilisateurs doivent apprendre par cœur les tables d'addition et de multiplication). Leur point fort est qu'ils sont, par contre, également adaptés à la soustraction et à la division. Il est évidemment inutile de décrire ici la méthode utilisée pour effectuer ces opérations puisque c'est le système que nous apprenons à l'école élémentaire de nos jours.

On ne connaît pas exactement l'histoire du système de numération de position. Les Babyloniens utilisaient un embryon de système de numération de position de base soixante. Malheureusement ils ne disposaient du signe zéro que pour une position : il n'était pas possible, avec leur système, de mettre deux ou plusieurs zéros de suite, ce qui rendait les nombres ambigus.

FIGURE 1.2 – Algoriste et abaciste

La première référence que nous connaissons à propos des chiffres dits arabe (mais en fait dus aux Indiens) est un passage de l'évêque syrien Severus SEBOKHT de 650 (cité dans [Smi-25], vol.

2. L'algorithme de la multiplication est considéré comme si difficile que l'École Navale le met encore explicitement au programme de son concours d'entrée au début du XIX^{e} siècle.

2, p. 64) :

> *Je ne parlerai pas de la science des Hindous, un peuple qui n'est pas le même que les Syriens, ni de leurs découvertes subtiles en astronomie, découvertes qui sont plus ingénieuses que celles des Grecs et des Babyloniens, ni de leurs méthodes de calcul de grande valeur et de leurs calculs qui dépassent la description. Je désire seulement dire que leurs calculs sont faits au moyen de neuf signes.*

On remarquera que le zéro n'est pas cité. La première occurrence du zéro que nous connaissions sans ambiguïté apparaît sur une inscription datant de 876 à Gwalior, sur laquelle on voit '50' et '270' ([Dat]).

Le premier siècle de l'empire musulman est, dans une large part, consacré aux travaux scientifiques. AL-MAMUM crée une *maison de la sagesse* à Bagdad, comparable à l'ancien Musée d'Alexandrie. C'est dans ce contexte que Mohammed ibn-Musa AL-KHWARIZMI reconnaît la valeur du système indien en 825 et écrit un petit livre expliquant son utilisation [AlK-32]. Ce livre est traduit/adapté en latin au XII^e siècle, avec pour incipit *Liber Algorismi de numero Indorum* (le livre d'al-Khowarizmi sur les nombres indiens), ce qui conduira à utiliser le mot 'algorithme' à propos de la nouvelle méthode pour écrire les nombres entiers et pour effectuer les calculs.

Le premier occidental à enseigner la nouvelle numération, vers 980, est GERBERT d'Aurillac (938-1003), devenu pape en 999 sous le nom de Sylvestre II. Il est allé étudier en Espagne et a certainement appris ce système à Barcelone, alors en contact étroit avec la civilisation arabe. Cependant il ne semble pas comprendre l'importance du zéro [Ger].

La méthode se développe surtout après la parution du livre de FIBONACCI intitulé *Liber abaci*, paru en 1202 [Fib-02]. On remarquera que la méthode des abaques est alors tellement prédominantes qu'elle désigne l'arithmétique, d'où le titre 'Le livre des abaques' alors qu'il n'est jamais fait référence à ceux-ci dans ce livre, au sens où nous l'entendons de nos jours.

<u>Abacistes et algoristes</u>.- Il semblerait qu'une rivalité s'ensuive au Moyen-Âge entre les *abacistes* (prétendant que l'utilisation d'un des premiers outils d'aide aux calculs, les *abaques*, est plus rapide que la nouvelle méthode) et les *algoristes*. Ces derniers l'emportent à partir du XV^e siècle. La célèbre figure 1.2, tirée du *Margarita Philosophica* de Gregor REISCH, paru à Freiburg en 1503, montre la coexistence des deux procédés.

1.1.1.2 Émergence du calcul sur les décimaux

Intérêt des décimaux

Les calculs que nous avons vus jusqu'ici ne concernent que les entiers naturels, liés au dénombrement. La notion de mesure, en particulier la mesure des longueurs (que ce soit la mesure des terrains ou d'un morceau d'étoffe), et l'adoption d'une unité de mesure, conduit à diviser cette unité de mesure pour obtenir une mesure plus fine et donc à l'utilisation des fractions ou, le plus souvent, aux nombres décimaux (ou l'analogue pour la base utilisée).

<u>Fraction, nombre décimal et nombre réel</u>.- Les réflexions sur les ensembles de nombres à la fin du XIX^e siècle (et l'enseignement qui en suivit en France dans les années 1960 sous le nom de « mathématiques modernes ») conduisent à bien distinguer l'ensemble des **nombres décimaux** :

$$\mathbb{D} = \{\frac{n}{10^k} \mid n \in \mathbb{Z} \; et \; k \in \mathbb{N}\}$$

de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels (ou des fractions), d'une part, et de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, d'autre part. Certains préfèrent parler de **nombre à virgule** pour avoir un concept indépendant de la base.

Apparition des nombres sexagésimaux à Babylone

La première apparition des nombres non entiers qui nous soit conservée concerne les **nombres sexagésimaux**, c'est-à-dire l'analogue des nombres décimaux avec une base de soixante au lieu de notre base usuelle de dix.

BOYER ([Boy-68], p. 33) nous rapporte qu'une vieille tablette babylonienne (numéro 7 289 de la collection Yale) inclut le calcul de la racine carrée à deux ou trois chiffres sexagésimaux après la virgule, la réponse étant en notation modernisée 1 ;24 ;51,10 où une virgule est utilisée pour séparer les parties entière et fractionnaire et un point virgule comme séparateur des chiffres sexagésimales, ceux-ci étant exprimés en base dix. L'addition et la multiplication de ces nombres sexagésimaux n'est pas plus difficile que les opérations analogues sur les nombres entiers. Remarquons au passage que, encore en 1968 (et même dans l'édition de 1989), Boyer parle de *fraction sexagésimale* et non de nombre sexagésimal.

Table des cordes de Ptolémée

Claude PTOLÉMÉE[3] vit à Alexandrie au IIe siècle après Jésus-Christ, à une époque relativement calme qui favorise les voyages et les explorations. Il décide de faire la synthèse des connaissances géographiques de son temps dans une œuvre qui va bien au-delà d'une simple synthèse. Il décrit la terre et le monde habité dans trois ouvrages : la *Syntaxe mathématique* d'abord (plus connue sous le nom d'*Almageste*, le très grand, que lui donnèrent les Arabes), où les diverses composantes du système terre-ciel sont étudiées par la géométrie ; l'*Apotélesmatique*, ou *Tétrabible*, ensuite qui présente un tableau des influences astrales (on dirait plutôt climatiques de nos jours) sur les divers pays et sur leurs habitants ; le *Guide Géographique* enfin (ou, pour faire court, la *Géographie*), qui donne toutes les directives utiles pour tracer une carte générale, et des cartes régionales, du monde habité, avec ses extensions récentes.

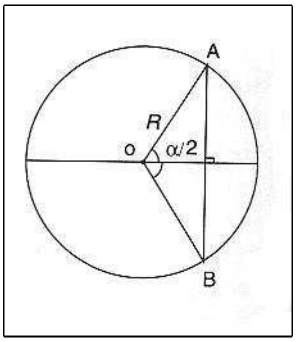
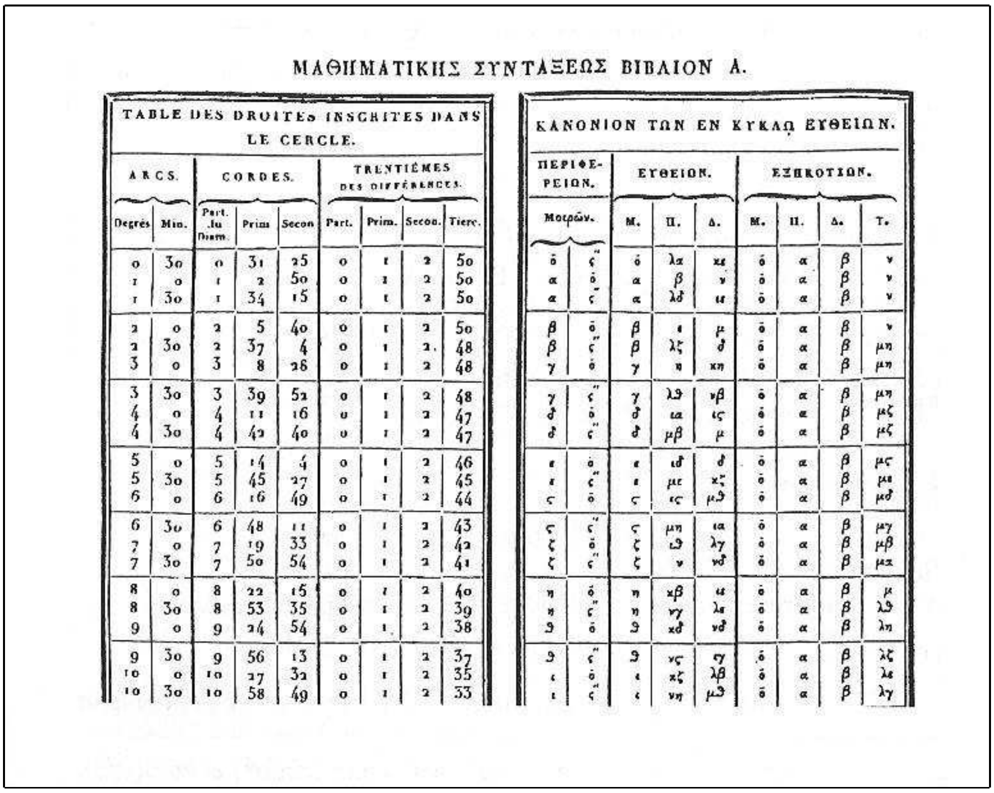


FIGURE 1.3 – Corde

La *Syntaxe mathématique* [Pto] est une synthèse ordonnée et une mise à jour des connaissances, acquises par la géométrie et l'arithmétique, sur le système du monde et ses différentes composantes. Il commence par rappeler les hypothèses philosophiques (la terre immobile au centre du monde réduite à un point, le ciel comme sphère en mouvement) puis, et c'est là son génie, il montre comment, d'une seule donnée concernant la latitude (longueur du jour le plus long, hauteur du pôle, rapport de l'ombre au gnomon), on peut déduire les autres. Il use pour ce

3. Pour une introduction à l'œuvre de Ptolémée, on pourra consulter [Auj-93].

faire non seulement de démonstrations géométriques, mais aussi de calculs qui lui sont facilités par les tables trigonométriques qu'il dresse dans le livre I.



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΤΑΞΕΩΣ ΒΙΒΛΙΟΝ Α.

TABLE DES DROITES INSCRITES DANS LE CERCLE.

ARCS.		CORDES.			TRENTIÈMES DES DIFFÉRENCES.			
Degrés	Min.	Part. du Diam.	Prim	Secon	Part.	Prim.	Secon.	Tierc.
0	30	0	31	25	0	1	2	50
1	0	1	2	50	0	1	2	50
1	30	1	34	15	0	1	2	50
2	0	2	5	40	0	1	2	50
2	30	2	37	4	0	1	2	48
3	0	3	8	28	0	1	2	48
3	30	3	39	52	0	1	2	48
4	0	4	11	16	0	1	2	47
4	30	4	42	40	0	1	2	47
5	0	5	14	4	0	1	2	46
5	30	5	45	27	0	1	2	45
6	0	6	16	49	0	1	2	44
6	30	6	48	11	0	1	2	43
7	0	7	19	33	0	1	2	42
7	30	7	50	54	0	1	2	41
8	0	8	22	15	0	1	2	40
8	30	8	53	35	0	1	2	39
9	0	9	24	54	0	1	2	38
9	30	9	56	13	0	1	2	37
10	0	10	27	32	0	1	2	35
10	30	10	58	49	0	1	2	33

ΚΑΝΟΝΙΟΝ ΤΩΝ ΕΝ ΚΥΚΛῼ ΕΥΘΕΙΩΝ.

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ. Μοιρῶν.		ΕΥΘΕΙΩΝ.			ΕΞΗΚΟΣΤΩΝ.			
		Μ.	Π.	Δ.	Μ.	Π.	Δ.	Τ.
ō	ς″	ō	λα	κε	ō	α	β	ν
α	ō	α	β	ν	ō	α	β	ν
α	ς″	α	λδ	ιε	ō	α	β	ν
β	ō	β	ε	μ	ō	α	β	ν
β	ς″	β	λζ	δ	ō	α	β	μη
γ	ō	γ	η	κη	ō	α	β	μη
γ	ς″	γ	λθ	νβ	ō	α	β	μη
δ	ō	δ	ια	ις	ō	α	β	μζ
δ	ς″	δ	μβ	μ	ō	α	β	μζ
ε	ō	ε	ιδ	δ	ō	α	β	μς
ε	ς″	ε	με	κζ	ō	α	β	με
ς	ō	ς	ις	μθ	ō	α	β	μδ
ς	ς″	ς	μη	ια	ō	α	β	μγ
ζ	ō	ζ	ιθ	λγ	ō	α	β	μβ
ζ	ς″	ζ	ν	νδ	ō	α	β	μα
η	ō	η	κβ	ιε	ō	α	β	μ
η	ς″	η	νγ	λε	ō	α	β	λθ
θ	ō	θ	κδ	νδ	ō	α	β	λη
θ	ς″	θ	νς	ιγ	ō	α	β	λζ
ι	ō	ι	κζ	λβ	ō	α	β	λε
ι	ς″	ι	νη	μθ	ō	α	β	λγ

FIGURE 1.4 – Table des cordes

PTOLÉMÉE crée donc la trigonométrie. La *corde* d'un angle α dans un cercle de rayon R (voir figure 1.3) est la longueur $cord(\alpha)$ de la corde correspondant à un arc de cercle sous-tendu par un angle au centre α.

La notion de corde a été remplacée par celle de sinus au VI^e siècle en Inde par ARYABHATA. Il est facile de voir que le rapport d'une corde au diamètre est égal au sinus de l'angle moitié : $cord(\alpha) = 2Rsin(\alpha/2)$.

PTOLÉMÉE établit une table des cordes de demi-degré en demi-degré, avec une approximation correspondant à presque six décimales exactes. Il utilise la division babylonienne du cercle en 360^o et calcule en numération sexagésimale. Il suppose que le diamètre est partagé en 120 parties égales, si bien que l'unité de longueur de corde sera la partie (^{p}), divisée à son tour en minutes (') et en secondes (").

PTOLÉMÉE explique comment il détermine sa table :

— 1) *Détermination de* $cord(72^o)$ *et* $cord(36^o)$. Il commence par construire géométriquement les côtés du pentagone et du décagone réguliers, qui sous-tendent respectivement des arcs de 72^o et de 36^o. Il en déduit, par utilisation itérée du théorème de Pythagore, les valeurs :

$$cord(72^o) = 70^p32'3'' \ et \ cord(36^o) = 37^p4'55''.$$

— 2) *Théorème de Ptolémée.* Il démontre ensuite le résultat, actuellement connu sous le nom de *théorème de Ptolémée* : dans un quadrilatère inscrit ABCD, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.

— 3) *Corde de la différence de deux angles.* Avec l'énoncé précédent, il montre comment, quand on connaît les cordes de deux angles α et β, on peut calculer la corde de la différence $\alpha - \beta$. Il s'agit de l'analogue du théorème sur $sin(\alpha - \beta)$. À partir de la corde de 72^o déjà calculée et de celle de 60^o, facile à déterminer, on en déduit la valeur de la corde de 12^o.

— 4) *Corde d'un arc moitié.* Ptolémée explique ensuite comment, quand on connaît la corde d'un angle, on peut calculer la corde de l'arc moitié. On en déduit les valeurs des cordes des angles 6^o, 3^o, $3/2^o$ et $3/4^o$.

— 5) *Corde de 1°.* Le procédé précédent ne permettant d'obtenir ni $cord(1^o)$, ni *a fortiori* $cord(1/2^o)$, Ptolémée utilise un encadrement subtil qui lui fournit la valeur de $cord(1^o)$, puis de $cord(1/2^o)$ avec une précision suffisante pour son projet.

— 6) *Table de demi-degré en demi-degré.* Ptolémée établit alors sa table selon la technique précédente en tenant compte aussi de ce que, grâce au théorème de Ptolémée, quand on connaît les cordes de deux angles α et β, on peut calculer la corde de la somme $\alpha + \beta$.

Remarquons que les cordes (ou les sinus) sont des nombres réels et non des nombres à virgule. La table contient donc des valeurs approchées mais Ptolémée ne le dit à aucun moment.

Nombres à virgule décimaux

<u>Apparition</u>.- L'utilisation des nombres à virgule décimaux (et non plus sexagésimaux) semble datée du chinois Liu Hui au troisième siècle après Jésus-Christ [Nee-59], à propos de l'écriture (de valeurs approchées) de racines carrées. Les calculs sur de tels nombres à virgule sont dominés en 1261, puisque Yang Hui multiplie 24,68 par 36,56 pour obtenir 902,3008. L'utilisation passe à l'Occident *via* les Indiens et les Arabes. Les tables de Rhaeticus (1551) contiennent les six fonctions trigonométriques pour les angles de 10" en 10" : les résultats sont exprimés sous forme de nombres à virgule décimaux à sept chiffres après la virgule.

<u>Utilisation courante des nombres à virgule</u>.- L'utilisation systématique des nombres à virgule décimaux pour la mesure des longueurs, des aires, des volumes et autres a été défendue par le mathématicien belge Simon Stevin en 1585 [Ste-34] dans son livre intitulé *De Thiende* (le dixième en flamand, traduit en français sous le nom *La disme*). Cependant cette proposition ne sera pas retenue avant la Révolution française.

Stevin écrit $47\boxed{0}$, $5\boxed{1}$, $8\boxed{2}$ le nombre décimal 47,58. Cela lui permet également d'écrire $2\boxed{3}7\boxed{5}$ pour 0,00207. Il justifie, et c'est le premier à le faire, les opérations sur ces nombres à virgule.

<u>Notion de valeur approchée</u>.- Stevin est également le premier mathématicien à préciser qu'un nombre à virgule est un nombre approché pour un nombre réel :

> *Il arrive quelquefois que le quotient ne peut pas être exprimé par des nombres entiers, comme dans le cas de* $4\boxed{3}$ *divisé par* $3\boxed{2}$. *Il apparaît ici que le quotient sera indéfiniment trois avec un tiers en addition. Dans un tel cas, nous pouvons approcher autant que l'on veut le quotient réel que le problème l'exige et omettre le reste. Il est vrai que* $13\boxed{0}3\boxed{1}3\frac{1}{3}\boxed{2}$, *ou* $13\boxed{0}3\boxed{1}\ 3\boxed{2}3\frac{1}{3}\boxed{3}$ *soit le résultat exact, mais dans* La Disme, *nous proposons de n'utiliser que les nombres entiers et, de plus, nous notons que en affaires on ne prend pas en compte la millième partie d'un grain. Les ommissions telles que celles-ci sont faites par les principaux géomètres et arithméticiens même dans les calculs d'une grande importance. Ptolémée et Jehan de Montroyal, par exemple, n'ont*

pas maquillé leurs tables avec la plus haute précision qu'ils pouvaient atteindre avec les nombres mélangés car, au vu du propos de ces tables, l'approximation est plus utile que la perfection.

Notation actuelle.- L'idée de la notation actuelle des nombres à virgule est due à Christopher RUDOLFF. Celui-ci publie en 1530 à Augsburg un livre comprenant une table d'intérêts composés dans laquelle apparaissent les valeurs de $375 \times (1+5/100)^n$ pour n variant de 1 à 10. Les résultats sont exprimés sous forme de fractions décimales, une barre verticale '|' jouant le rôle de notre virgule décimale. On a par exemple 413|4375 pour $n = 2$. Cette table est reproduite p. 241 du volume II de [Smi-25].

La notation actuelle, avec un point décimal pour les anglo-saxons et une virgule sur le continent, est due à John NAPIER, l'inventeur des logarithmes. Nous avons vu que le problème du repérage sur une sphère a conduit PTOLÉMÉE à introduire les fonctions trigonométriques. Les tables furent utilisées pour la navigation au long cours. La formule donnant $cos(a+b)$ fait intervenir deux multiplications. NAPIER introduit les logarithmes pour faciliter le calcul des tables, en remplaçant la multiplication par une addition. Il présente ses logarithmes (de fonctions trigonométriques) dans un livre écrit en latin, son *Descriptio* de 1614. Ce qui nous intéresse ici est que la notation des nombres à virgule, avec un point décimal, apparaît dans la traduction anglaise de ce livre en 1616. Henry BRIGGS utilise la virgule décimale dans sa table de 1624.

Les notations restent diverses durant un siècle jusqu'à ce que Léonard EULER la rende standard dans son *Introductio in Analysis Infinitorum* [Eul-48] de 1748.

1.1.1.3 Apparition du calcul sur les fractions

Intérêt des fractions.- La notion de fraction apparaît certainement avec les problèmes de mesure. La mesure des grandeurs n'a pas cependant à être très précise en pratique, aussi l'utilisation des nombres à virgule est-elle suffisante. Les problèmes de change, liés au commerce international en Europe médiévale, par contre, nécessitent une agilité dans la manipulation des fractions.

Considérons par exemple Adam RIESE [Car-65], qui vulgarise les nombres arabes en Allemagne à partir de 1518. La table des matières d'un de ses nombreux livres consacrés à l'enseignement de l'arithmétique est : numération, addition, soustraction, duplication, médiation, multiplication, division, progression, règle de trois, échange des monnaies, profit, calcul de l'argent et de l'or, partenariat et réduction (des fractions). Un des problèmes de change de l'édition de 1559 commence ainsi :

Sept florins de Padoue en font cinq à Venise, 10 à Venise en font 6 à Nuremberg, 100 à Nuremberg en font 73 à Cologne. Combien font 1000 fl. de Padoue à Cologne. Cela fait 312 et 6/7.

On voit tout l'intérêt des fractions exactes pour les problèmes de change. Le numérateur peut être n'importe quel entier, contrairement à ce qui se passait pour les Égyptiens, comme nous allons le voir.

Apparition des fractions unitaires en Égypte.- Nous ne possédons aucun témoignage sur la naissance des fractions. Les inscriptions en hiérogyphes des Égyptiens (voir sections 1-6 et 1-8 de [BJB-76]) ont une notation spéciale pour les fractions de l'unité, c'est-à-dire les fractions avec un numérateur égal à un : la réciproque d'un nombre entier est indiquée en plaçant un signe d'ovale allongée sur le nombre représentant cet entier. En notation hiératique, l'ovale est remplacée par un point. De telles fractions de l'unité sont utilisées dans le papyrus Rhind mais les fractions les plus générales ne semblent pas être connues.

Les fractions en Grèce.- Sous l'influence des Égyptiens, les Grecs ont commencé par n'utiliser les fractions que comme somme de fractions unitaires (voir la fin de la section 3-2 de [BJB-76]). Ils notent ensuite les fractions de deux façons.

Ils écrivent quelquefois les fractions avec le numérateur suivi d'un accent et le dénominateur écrit deux fois, à chaque fois suivi d'un double accent. Par exemple, en se souvenant que les chiffres grecs sont les lettres dans l'ordre alphabétique, $\frac{2}{3}$ est écrit :

$$\beta'\gamma''\gamma''$$

Ils écrivent aussi le dénominateur sous le numérateur, mais sans utiliser notre barre de fraction :

$$\begin{matrix}\beta\\ \gamma\end{matrix}$$

Les fractions et les taux de change.- L'utilisation des fractions prend toute son importance avec les problèmes de taux de change. Ceci devient d'usage courant après la publication du *Liber Abaci* [Fib-02] de FIBONACCI en 1202 et de *La Disme* de Simon STEVIN en 1585 [Ste-34].

1.1.1.4 Les réels comme idéalisation des décimaux

Nous venons de voir les calculs (ou plus exactement les quatre opérations que sont l'addition, la multiplication, la soustraction et la division) sur trois ensembles de nombres (entiers naturels, nombres décimaux et nombres rationnels positifs). Faisons une petite digression à propos d'un ensemble de nombres, celui des réels, pour lesquels ces quatre opérations sont définies mais à propos duquel on ne parle pas de calcul.

Découverte des irrationnels.- Le fait que tout nombre, introduit de façon naturelle, n'est pas nécessairement un nombre rationnel (une fraction) est une découverte de l'École de PYTHAGORE [vonF-45] au VI^e^ siècle avant J.-C. Le théorème de Pythagore conduit à considérer la longueur d'une diagonale de carré l'unité, ce que nous notons $\sqrt{2}$, dont on montre alors que ce ne peut pas être un nombre rationnel. Cette découverte est si contraire à la philosophie de l'École de PYTHAGORE (pour qui tout est nombre, sous-entendu entier ou quotient d'entiers) qu'il est alors interdit d'en révéler l'existence à l'extérieur de l'école. Une légende veut qu'un certain HIPPASE de Métaponte divulgue la découverte et qu'il est englouti dans les flots (sous-entendu par vengeance ou par suicide causé par les remords).

On ne connaît pas la démonstration de l'École de PYTHAGORE du fait que $\sqrt{2}$ soit irrationnel. La première démonstration connue, celle qui est encore donnée de nos jours, date de deux siècles plus tard (ARISTOTE, *Analytiques Postérieurs*, [Ari] I 23).

Définition des nombres réels.- EUDOXE de Cnide (408–355) résout la *crise des irrationnels* en donnant la définition d'un nouvel ensemble de nombres, sous une forme qui nous est inconnue puisque toute son œuvre est perdue. La théorie des rapports d'EUDOXE est cependant reprise dans le livre V des *Éléments* [Euc] d'EUCLIDE (vers 300 avant J.-C.), selon les dires de PROCLUS au V^e^ siècle après J.-C [Pro]. Ce livre des *Éléments* est de lecture difficile mais Jean DHOMBRES [Dho-78] en donne une interprétation moderne comme définition d'un demi-corps totalement ordonné archimédien maximal.

Cette définition suffit jusqu'au moment où on se penche sur les fondements de l'Analyse. Charles MÉRAY, Karl WEIERSTRASS et Georg CANTOR donnent trois constructions de l'ensemble des nombres réels en 1870, qui se révèlent être équivalentes. David HILBERT en donne une définition axiomatique (analogue à l'interprétation de DHOMBRES citée ci-dessus) en 1900.

Théorie et pratique.- La distinction entre nombres décimaux et nombres réels n'est pas claire jusqu'en 1870, ou tout au moins fait-on semblant. On raisonne sur les réels, on calcule avec les décimaux en espérant que les erreurs commises peuvent être considérées comme négligeables.

1.1.2 Présentation informelle des algorithmes

Les algorithmes apparaissent dès les premières civilisations de l'époque historique (c'est-à-dire possédant l'écriture, rappelons-le) connues, Mésopotamie et Égypte. La présentation des algorithmes varie évidemment selon celles-ci.

1.1.2.1 Les algorithmes en Mésopotamie

L'étude systématique des mathématiques mésopotamiennes date des travaux de Otto NEUGEBAUER ([Neu-35] et [NG-45]) en Allemagne et de François THUREAU-DANGIN en France [Thu-38]. On peut classer les textes mathématiques babyloniens en deux catégories : les tables numériques et les tablettes de problèmes. Les premières ne sont pas différentes des tables modernes : des nombres disposés en colonnes, ordonnés selon des séries croissantes ou décroissantes. Les tablettes de problèmes sont des recueils d'exercices, comme on en trouve à la fin de nos manuels scolaires. Ce sont certainement des recueils didactiques car dans bien des cas ils supposent des précisions que l'énoncé ne fournit pas et qui devaient être indiquées oralement à l'élève.

Considérons par exemple le premier problème étudié par THUREAU-DANGIN, celui de la tablette 13 901 du British Museum :

> *La surface du carré ajoutée au côté égale ;45. Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras 1 en 2. On trouve ;30. Tu croiseras ;30. On trouve alors ;15. Tu ajouteras ;15 et ;45. On trouve 1. C'est le carré de 1. Tu soustrairas de 1 les ;30 que tu as croisés. On trouve ;30. C'est le côté du carré.*

Traduit avec des notations algébriques modernes, cela donne :

On veut résoudre l'équation $x^2 + bx = c$, en prenant comme exemple b = 1 et c = ;45.
L'unité, c'est-à-dire le coefficient b de x, est ici égale à 1.
On divise b par deux. On trouve dans notre cas $\frac{b}{2} =;30$.
On l'élève au carré. On trouve dans notre cas $(\frac{b}{2})^2 =;15$.
On ajoute $(\frac{b}{2})^2$ et c. On trouve dans notre cas $(\frac{b}{2})^2 + c = 1$.
On détermine la racine carrée. On a dans notre cas $\sqrt{(\frac{b}{2})^2 + c} = 1$.
On soustrait ce qu'on a élevé au carré, c'est-à-dire $\frac{b}{2}$ rappelons-le. On obtient dans notre cas : $\sqrt{(\frac{b}{2})^2 + c} - \frac{b}{2} =;30$.
C'est le côté du carré voulu. Dans notre cas $x =;30$.

Exercice.- *Justifier l'algorithme.*

1.1.3 Les algorithmes en Égypte

Les plus anciens textes mathématiques égyptiens connus contiennent principalement des problèmes de nature pratique, tels que des calculs de capacité, le nombre de briques nécessaires pour construire un mur ou le stock de grains nécessaire pour la préparation d'une certaine quantité de pain ou de bière.

La principale source d'information est le *papyrus Rhind* [Cha-27] (nom qui lui est donné en hommage à l'anglais A. Henry RHIND qui l'a acheté à Louxor en 1858 et revendu au British

Museum). Il existe quatre autres documents, de moindre importance : le *papyrus de Moscou*, le *papyrus Kahun*, le *papyrus de Berlin* et le *rouleau de cuir*. L'intégralité de ces cinq documents est traduit en anglais dans [Cla-99].

Les algorithmes ressemblent à ceux de la Mésopotamie. Considérons par exemple le probème 26 du papyrus Rhind :

> *Une quantité et son quart font 15. Quelle est la quantité ? La solution est la suivante : calculer avec 4 ; prends le quart, 1 ; ensemble 5 ; calculer avec 5 pour obtenir 15, soit 3. On a 4×3. Ainsi 12 est le résultat.*

Le principe de cette méthode sera appelé plus tard la méthode de la fausse position.

1.1.4 Pas d'algorithme en Grèce

Les Grecs faisaient une distinction très nette entre l'*arithmétique* (*arithmetike'*, de *arithmos'*, nombre), qui correspond à notre théorie des nombres, et la *logistique* (*logistike'*), qui désigne l'art du calcul, si on en croit *La République* [VII 522-526] de Platon (429–347). L'attitude des Grecs à l'égard des arts et métiers est que ceux-ci ne sont pas dignes d'attention et réservés aux eslaves. Nous ne possédons donc que peu de témoignages sur la logistique. Nous avons peu de chances de trouver des présentations d'algorithmes comme en Mésopotamie ou en Égypte.

Ces deux branches, arithmétique et logistique, seront traitées séparément jusqu'au début de l'imprimerie.

1.1.5 Les algorithmes en Chine

L'ouvrage mathématique classique se nomme *Les Neuf Chapitres*, dont nous disposons d'une édition française depuis 2004 [Chem-04], et date de 2 000 ans environ. Il s'agit d'une liste d'algorithmes pour des problèmes divers. Chaque problème donne lieu à plusieurs exemples numériques suivis d'une procédure générale.

Citons par exemple le problème (1.21) (pp. 169–171 de la traduction française) :

> (1.21)
>
> Supposons maintenant qu'on ait un champ de 4/5 de *bu* de largeur, et de 5/9 de *bu* de longueur. On demande combien fait le champ.
>
> Réponse : 4/9 de *bu*[4].
>
> Procédure de la multiplication des parts :
>
> Les dénominateurs multipliés l'un par l'autre font le diviseur ; les numérateurs multipliés l'un par l'autre font le dividende. On effectue la division du dividende par le diviseur.

1.1.6 Le besoin des tables numériques

1.1.6.1 Le calcul comme tâche collective

L'établissement des tables, de plus en plus nombreuses, ne peut plus être le fait d'un seul homme. Au XVI^e siècle l'astronome allemand Rheticus (1514–1574) emploie une équipe de calculateurs durant une dizaine d'années pour établir une table des sinus à quinze décimales avec un pas de 10" pour les angles, publiée bien après sa mort en 1596 par son élève Valentin Otto dans l'*Opus Palatinum de Triangulis*. Mais on ne connait rien des détails de la méthode utilisée.

4. carré.

1.1.6.2 Prony

Gaspard de Prony (1755-1839) (voir [O'C-97]) est le premier à expliquer sa méthode, issue de la lecture d'Adam Smith.

Adam Smith (1723-1790), dans le chapitre un du livre un de sa *Richesse des Nations* de 1776 ([Smi-76]), insiste sur l'intérêt de la division du travail, illustrant son propos par la manufacture d'épingles :

> *Un homme qui ne serait pas façonné à ce genre d'ouvrage, dont la division du travail a fait un métier particulier, ni accoutumé à se servir des instruments qui y sont en usage, dont l'invention est probablement due encore à la division du travail, cet ouvrier, quelque adroit qu'il fût, pourrait peut-être à peine faire une épingle dans toute sa journée, et certainement il n'en ferait pas une vingtaine. Mais de la manière dont cette industrie est maintenant conduite, non seulement l'ouvrage entier forme un métier particulier, mais même cet ouvrage est divisé en un grand nombre de branches, dont la plupart constituent autant de métiers particuliers. [...] L'important travail de faire une épingle est divisé en dix-huit opérations distinctes ou environ, lesquelles, dans certaines fabriques, sont remplies par autant de mains différentes. [...] J'ai vu une petite manufacture de ce genre qui n'employait que dix ouvriers. [...] Quand ils se mettaient en train, ils venaient à bout de faire entre eux environ onze livres d'épingles par jour ; or, chaque livre contient au delà de quatre mille épingles de taille moyenne. Ainsi, ces dix ouvriers pouvaient faire entre eux plus de quarante-huit milliers d'épingles dans une journée.*
>
> [...]
>
> *Observez, dans un pays civilisé et florissant, ce qu'est le mobilier d'un simple journalier ou du dernier des manœuvres, et vous verrez que le nombre de gens dont l'industrie a concouru pour une part quelconque à lui fournir ce mobilier, est au-delà de tout calcul possible. [...] Il est bien vrai que son mobilier paraîtra extrêmement simple et commun, si on le compare avec le luxe extravagant d'un grand seigneur ; cependant, entre le mobilier d'un prince d'Europe et celui d'un paysan laborieux et rangé, il n'y a peut-être pas autant de différence qu'entre les meubles de ce dernier et ceux de tel roi d'Afrique qui règne sur dix mille sauvages nus.*

Prony, après avoir lu *Richesses des Nations*, a l'idée d'appliquer ce principe de la division du travail au travail mental :

> *Il est aisé de concevoir comment cette méthode rend possible et commode la distribution du travail à autant de calculateurs qu'on veut, parmi lesquels il suffit d'en avoir un très-petit nombre exercés à la théorie du calcul et à l'analyse : ce qu'on doit rigoureusement exiger des autres se réduisant à écrire lisiblement les chiffres, et à savoir faire l'addition et la soustraction numériques.*
>
> *D'après ce plan, les calculateurs des tables du cadastre ont été divisés en trois sections.*
>
> *La première section était composée de cinq à six mathématiciens d'un très-grand mérite, parmi lesquels j'ai eu le plaisir de compter notre confrère le citoyen Legendre. Ils s'occupaient de la partie analytique du travail, et en général de l'application de la méthode des différences à la formation des tables, du calcul de plusieurs nombres fondamentaux, etc.*
>
> *La deuxième section contenait sept ou huit calculateurs exercés tant aux calculs arithmétiques qu'à l'analyse ; ils étaient employés à déduire des formules générales les nombres et les* différences *formant les points de départ et d'arrivée des* intervalles, *à vérifier les cahiers qu'on leur faisait repasser de la troisième section, etc., etc.*

> *Je ne puis trop insister sur la reconnaissance que doivent les savants de tous les pays aux membres de ces deux sections ; sans leur zèle soutenu et leur habileté, tous les moyens fournis par le Gouvernement, pour faciliter l'exécution de la vaste entreprise dont ils étaient les coopérateurs, eussent été prodigués en pure perte.*
>
> *Le résultat du travail des mathématiciens dont je viens de parler était de remplir la première ligne horizontale et la dernière ligne verticale [Cette dernière ligne verticale, à droite du tableau, était occupée par la différence qui se trouvait constante dans l'intervalle auquel se rapportait ce tableau.] d'un certain nombre de tableaux qu'on distribuait aux calculateurs de la 3^e^ section, et ceux-ci, au moyen des deux lignes qui leur étaient données, remplissaient tout le surplus de l'*aire *de la table par de simples additions ou soustractions ; ils ont été communément au nombre d'environ soixante ou quatre-vingt ; les neuf dixièmes au moins d'entre eux savaient, tout au plus, les deux ou les quatre premières règles de l'arithméique ; et ceux qui en savaient davantage n'ont pas toujours été les moins sujets à erreur.*
>
> *Le travail de chaque section se faisait double, par des formules différentes dans les deux premières et sans aucune communication pendant la durée du calcul, en sorte qu'on pouvait considérer l'ensemble des calculaleurs comme composé de deux divisions, dont chacune était séparément occupée à faire le même travail que l'autre.*

Voilà comment Dorothy STEIN décrit les travaux de PRONY dans sa biographie d'Ada BYRON :

> *Le baron Gaspard de Prony était directeur de l'École des Ponts et Chaussées* [il ne le deviendra en fait qu'en 1798], *lorsqu'il reçut mission en 1792 de la part du gouvernement français de superviser la préparation des nouvelles tables mathématiques qu'exigeait l'adoption du système métrique. Réfléchissant à la façon d'organiser un travail aussi considérable, il tomba par hasard sur un exemplaire de* Richesse des Nations. *Il décida immédiatement de fabriquer ses logarithmes comme des épingles.*
>
> *Il monta deux ateliers qui effectuaient les mêmes calculs et se contrôleraient donc mutuellement. Au-dessus d'eux se trouvaient deux autres sections de travail mental. La première section, composée de cinq ou six mathématiciens parmi les plus éminents de France, était chargée de décider des meilleurs formules à employer pour calculer pas à pas les fonctions qui devaient figurer dans les tables. (Ils exécutaient la tâche des programmeurs.) Ces formules étaient alors transmises à la deuxième section, formée de sept ou huit mathématiciens compétents qui devaient substituer des nombres aux symboles des formules, puis les passer à la troisième section (ceux-ci faisaient fonction de clavistes). La deuxième section devait aussi assurer, au retour des calculs finis, la comparaison et la coordination des résultats.*
>
> *La troisième section comprenait soixante à quatre-vingt personnes qui exécutaient la plus grand partie du travail numérique, en utilisant seulement l'addition et la soustraction.*
>
> [Ste-85], pp. 125-126 de la traduction française

Les tables sont achevées en 1801 mais elles ne sont pas publiées avant la fin du XIX^e^ siècle, car trop onéreuses à imprimer.

1.1.6.3 Les erreurs dans les tables de navigation

Les tables diverses deviennent indispensables, principalement pour la navigation comme nous l'avons déjà dit. Cependant ces tables comportent des erreurs. Dionysius LARDNER, professeur de philosophie naturelle et d'astronomie à l'université de Londres, est un vulgarisateur des sciences prolifique. Dans un article de 1834 [Lar-34], il inspecte une collection privée de 140 volumes de tables (certainement celle de Charles BABBAGE). Dans une sélection aléatoire de 40 volumes, il trouve plus de 3 000 erreurs spécifiées dans les feuilles d'*errata*. Ces erreurs peuvent prendre naissance lors de n'importe laquelle des trois étapes de la préparation des tables : le calcul, la transcription et l'impression.

Charles BABBAGE (1791–1871) veut éviter ces trois types d'erreur en créant une machine qui à la fois effectue les calculs et imprime les tables. Il conçoit le premier ordinateur, entièrement mécanique, qu'il n'arrive pas à réaliser par déficience de l'industrie mécanique de l'époque (un exemplaire sera partiellement réalisé en 1991 pour le bicentenaire de sa naissance).

BABBAGE essaie d'obtenir des subsides pour construire sa machine. Il en présente le projet à divers endroits, en particulier à Turin :

> *En 1840, Babbage se rendit à Turin pour donner une série de conférences et participer à des discussions dont le but était d'expliquer le projet de la Machine Analytique à un groupe de philosophes et d'hommes de science italiens. Il avait espéré que le plus éminent d'entre eux, le baron Plana, écrirait un article ou un rapport sur le sujet, mais Plana se déroba en invoquant des ennuis de santé. Il dut se contenter, à la fin, du concours d'un jeune ingénieur militaire, le capitaine Luigi Menabrea (qui devait devenir plus tard Premier ministre d'Italie). [...] Il parut, en français, dans la* Bibliothèque Universelle de Genève*, en octobre 1842.*
>
> [Ste-85], pp. 117-118 de la traduction française

Les travaux de PRONY sont cités par Luigi MENABREA [Men-42], probablement avec l'encouragement de BABBAGE, comme un préalable à la discussion de la *Machine Analytique* de ce dernier.

La notion de programme (d'ordinateur) est due conjointement à Charles BABBAGE et à Lady Ada LOVELACE. Elle apparaît en note dans la traduction anglaise [Men-42] que Lady Ada LOVELACE donne de l'article de MENABREA.

1.1.6.4 Les bureaux de calculs

On a donc employé des hommes moins qualifiés que les mathématiciens pour aider à l'établissement de tables. Il n'est pas nécessaire qu'ils sachent ce qu'est un logarithme, par exemple. On leur communique un plan de calculs à réaliser, avec des cases à remplir. Les anciens instituteurs, en particulier, conviennent bien à cette tâche. Le rôle du mathématicien consiste à établir ce plan de calcul, ce programme ou cet algorithme comme nous dirions de nos jours. Naissent alors les *bureaux de calculs* dans lesquels des employés suivent l'algorithme pour un jeu de données, en effectuant les quatre opérations et en les reportant sur des feuilles sur lesquelles l'emplacement des opérations intermédiaires est marqué. Les employés ne comprennent pas nécessairement le but de cette suite de calculs, mais cela n'a pas d'importance. Les bureaux de calculs deviennent des officines courantes à la fin du XIX^e siècle et ne disparaîtront que dans les années 1960 avec l'utilisation courante des ordinateurs.

1.1.6.5 Calculs de résistance des matériaux

Zuse

Konrad ZUSE, né le 22 juin 1910 à Berlin-Wilmersdorf, passe ses jeunes années en Prusse-Orientale, puis en Silésie, selon les affectations de son père, fonctionnaire des Postes. Dès ses études secondaires, à Dresde, son penchant pour les disciplines techniques se manifeste. Lorsque ses parents s'installent à Berlin, en 1927, Konrad entre à l'École technique supérieure de Charlottenburg et y obtient, en 1935, un diplôme d'ingénieur civil.

Besoins

Dans sa spécialité, l'ingénierie industrielle, les calculs sur la résistance des matériaux se révélent délicats et interminables, bien que leur principe soit parfaitement maîtrisé. Pour calculer la structure d'un toit, un ingénieur doit résoudre un système d'équations linéaires prenant en compte un certain nombre de paramètres tels que le poids, la résistance et l'élasticité des matériaux de construction. La limite pratique pour un individu est un système de six équations à six inconnues. Même avec l'aide de calculatrices, une équipe d'ingénieurs passe des mois à résoudre le système d'équations relatif à un grand toit.

Tableaux

Pour alléger ces corvées, ZUSE imagine de dessiner des tableaux préimprimés, décomposant en étapes les processus les plus fréquents. Les données variables sont placées dans des cases ; leur emplacement et des flèches symbolisent la suite des opérations à effectuer.

Machine

Il va plus loin. Pourquoi ne pas construire un mécanisme qui exécuterait ces tâches seul et dans le bon ordre ? Le jeune homme découvre qu'il est inutile de transférer des données de case en case ; connaître l'adresse de ces données suffit ; dûment instruit, un calculateur automatique saurait les y trouver, à l'instant nécessaire. L'essentiel reste de déterminer un bon « plan de calcul ». Au terme de ses réflexions, ZUSE en arrive à concevoir une machine théorique générale, capable d'exécuter n'importe quelle séquence d'opérations pourvu qu'on sache l'exprimer sous la forme d'une suite finie d'opérations élémentaires. Il aboutit à une théorie analogue à celle d'Alan TURING dont il ignore les travaux, avec une différence essentielle : il n'a jamais prévu la rupture de séquence.

Brevet

Fin 1935, son diplôme en poche, ZUSE prend un emploi d'analyste de contraintes dans un bureau d'études du constructeur aéronautique Henschel, à Berlin. La corvée des équations à résoudre, de nouveau présente, le confirme dans sa décision de créer une « machine ». À partir de 1936, ZUSE consacre ses heures de liberté à la réalisation de son projet, utilisant pour cela un coin du salon de ses parents, transformé en atelier. Il comprend que la mécanisation du calcul en base dix est trop complexe et s'oriente vers le binaire. Dans un calculateur contrôlé par un programme écrit sur un ruban et lu par la machine, le programme est une suite d'instructions, chacune spécifiée par un code d'opération, deux adresses d'opérandes et une adresse de résultat. Le seul témoignage de l'époque qui nous reste de ces réflexions est le dépôt de brevet, daté du 11 avril 1936 :

> *L'invention sert à faire exécuter de façon automatique par un calculateur des calculs récurrents, consistant en un assemblage d'opérations arithmétiques élémentaires.*
>
> *Le prérequis pour chaque type de calcul est de préparer un plan de calcul dans lequel les opérations sont listées séquentiellement en indiquant leur type. [...]*
>
> *L'exécution des opérations numériques est une activité purement mécanique. Elle peut être exécutée sur des calculateurs conformément à la méthode suivante.*
>
> *On relie les organes arithmétiques aux organes de mémoire à travers un mécanisme de sélection de façon que toute cellule de mémoire puisse accepter un nombre. Le but du sélecteur est de relier la cellule de mémoire requise avec l'organe de calcul, par un moyen mécanique ou électrique, de façon à utiliser le nombre stocké dans une opération ou de stocker un nombre dans la cellule.*
>
> *[...]*
>
> *Le plan de calcul est représenté sous une forme adéquate pour le contrôle des divers organes, par exemple sur un ruban perforé. Le plan est alors lu, section par section, par la machine et fournit les données suivantes pour chaque opération arithmétique individuelle : les adresses numériques des cellules de stockage contenant les opérandes ; le type d'instruction arithmétique de base ; l'adresse numérique de la cellule dans laquelle le résultat doit être stocké. Le plan de calcul initie les opérations nécessaires.*
>
> *La méthode est expliquée par l'exemple suivant.*

Nous désirons préparer un plan pour calculer un déterminant 3×3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Nous avons neuf valeurs initiales. Pour éviter l'introduction de nouveaux symboles alphabétiques au cours du calcul, les valeurs sont numérotées séquentiellement.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Opération	1.) $1 \times 5 = 10$	10.) $18 \times 9 = 19$
	2.) $10 \times 9 = 11$	11.) $3 \times 5 = 20$
	3.) $2 \times 6 = 12$	12.) $20 \times 7 = 21$
	4.) $12 \times 7 = 13$	13.) $11 + 13 = 21$
	5.) $3 \times 4 = 14$	14.) $22 + 15 = 23$
	6.) $14 \times 8 = 15$	15.) $23 - 17 = 24$
	7.) $1 \times 6 = 16$	16.) $24 - 19 = 25$
	8.) $16 \times 8 = 17$	17.) $25 - 21 = 26 = résultat$
	9.) $2 \times 4 = 18$	

Il y a 26 nombres apparaissant au cours du calcul. Si la mémoire a assez de cellules, il sera possible de stocker les nombres dans les cellules correspondant à leurs adresses numériques. On peut cependant s'arranger pour avoir moins de cellules puisque beaucoup de ces nombres n'ont pas besoin d'être stockés, il suffit qu'ils restent dans l'unité arithmétique ; d'autre part quelques cellules deviendront libres au cours du calcul puisque leur contenu ne sera plus requis. On a intérêt à construire le plan de calcul en utilisant le moins possible de cellules mémoires. Afin que le plan suive un schéma uniforme, un nombre qui reste dans l'unité arithmétique pour la prochaine opération sera stocké dans la cellule mémoire 0. Le plan de calcul contient alors quatre paramètres pour chaque opération.

Plan de calcul pour un déterminant 3×3

Opération No.	Adresse de pour l' 1	la cellule opérande 2	Types d'opération arithmétique de base	Adresse de la cellule du résultat
1.)	1	5	Mult.	0
2.)	0	9	”	10
3.)	2	6	”	0
4.)	0	7	”	11
5.)	3	4	”	0
6.)	0	8	”	12
7.)	1	6	”	0
8.)	0	8	”	13
9.)	2	4	”	0
10.)	0	9	”	14
11.)	3	5	”	0
12.)	0	7	”	15
13.)	10	11	Add.	0
14.)	0	12	”	0
15.)	0	13	Sous.	0
16.)	0	14	”	0
17.)	0	15	”	0 = résultat

[Zus-36]

Il s'agit d'un programme linéaire, séquencement d'instructions élémentaires, sans possibilité de rupture de séquence, qui a été redécouvert par Zuse indépendamment de la machine analytique de Charles Babbage.

1.2 Bibliographie

[Abs-37] Absolom, Karl, *An ivory head 30,000 years old found in Vestonice*, **London Illustrated News**, October 2, 1937.

[AlK-32] Al-Khwarizmi, Muhammad Ibn Musa, **Le calcul indien : versions latines du XII^e siècle**, édition de André Allard et traductions françaises, Albert Blanchard, 1992, LXXI + 270 p.

[La meilleure édition. La version arabe est perdue.]

[Ari] Aristote, **Les seconds analytiques**, traduction de Jean Tricot, Vrin, 1947.

[Auj-93] Aujac, Germaine, **Claude Ptolémée : astronome, astrologue, géographe**, Éditions du CTHS, 1993, 428 p.

[BJB-76] Bunt, Lucas and Jones, Phillip and Bedient, Jack, **The historical roots of elementary mathematics**, Prentice-Hall, 1976, XIII + 299 p. Reed. Dover, 1988.

[Boy-68] Boyer, Carl B. and Merzbach, Uta C., **A History of Mathematics**, 1968, 2nd edition 1989, Wiley, XVIII + 762 p.

[Car-65] CARPENTER, Dorothy, *Adam Riese*, **Mathematics Teacher**, vol. 58, October 1965, pp. 538–543. Reprinted in SWETZ, Frank (ed.), **From Five Fingers to Infinity**, Open Court, 1994, XX + 770 p., pp. 354–358

[Cha-27] CHACE, A., **The Rhind Mathematical Papyrus**, Oberlin, Ohio, deux volumes, 1927 et 1929. Réédition partielle par *The National Council of Teachers of Mathematics* en 1979.

[Chem-04] CHEMLA, Karine and SHUCHUN, Guo, **Les Neuf Chapitres : le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires**, Dunod, 2004, XVII + 1117 p.

[Cla-99] CLAGETT, Marshall, **Ancient Egyptian Science. A Source Book. Volume Three : Ancient Egyptian Mathematics**, American Philosophical Society, Philadelphia, 1999, X + 462 p.

[Dat] DATTA, **Amer. Math. Month.**, vol. XXXIII, p. 449.

[Dav-65] DAVIS, Martin, **The undecidable : Basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems and computable functions**, Raven press, New-York, 1965. Reed. Dover, 2004, 413 p., ISBN 0486432289.

[Dho-78] DHOMBRES, Jean, **Nombre, mesure et continu : épistémologie et histoire**, Cedic/Fernand Nathan, 1978, 338 p.

[Euc] EUCLIDE, **Les œuvres**, Paris, 1819. Traduction par François Peyrard. Comprend **Les éléments**, **Les données** et **Le premier livre des cinq corps d'Hypsicle**. II + 627 p. Réédition Blanchard avec une introduction de Jean ITARD, 1966.

[Eul-48] EULER, Léonard, **Introductio in Analysis Infinitorum**, 1748, Lausanne. Traduction française par J.-B. Labey, **Introduction à l'analyse infinitésimale**, Paris, 1796, 2 volumes, XVI + 364 p., 414 p. + 16 planches. Réédition A.C.L., 1987.

[Fib-02] FIBONACCI, **Liber Abaci**, 1202. English translation by SIGLER, L. E., **Fibonacci's Liber Abaci**, Springer, 2002, VIII + 636 p.

[Ger] GERBERT, **Gerberti postea Silvestri II papae opera mathematica (972 - 1003)**, édition de Nicolaus Bubnov, R. Friedlander & Sohn, Berlin, 1899. Version numérique téléchargeable.

[Lar-34] LARDNER, Dionysius, *Babbage's calculating engine*, **Edinburgh Review**, vol. 59, 1834, pp. 263–327. Reproduit dans [Mor-61], pp. 163–224.

[Men-42] MENABREA, Luigi Frederico, *Notions sur la Machine Analytique de M. Charles Babbage, par Mr. [sic] L.-F. Menabrea, capitaine du génie militaire*, **Bibliothèque Universelle de Genève**, octobre 1842, vol. 41, pp. 352–376. Numérisé par *Bibnum.*

English translation *Sketch of the Analytical Engine Invented by Charles Babbage. With Notes upon the Memoir by the Translator, Ada Augusta, Countess of Lovelace* in [Mor-61], pp. 225–297.

[Mor-61] MORRISON, Philip and MORRISON, Emily, **Charles Babbage : On the Principles and Development of the Calculator and Other Seminal Writings**, Dover, 1961, XXXVIII + 400 p.

[Nee-59] NEEDHAM, J., **Science and Civilisation in China, vol. III : Mathematics and the Sciences of the Heavens and Earth**, Cambridge University Press, 1959.

[Neu-35] NEUGEBAUER, Otto, **Mathematische Keilschriftexte**, Springer-Verlag, Berlin, trois volumes parus de 1935 à 1937. Réédition 1973.

[NG-45] NEUGEBAUER, O. and SACHS, A., **Mathematical cuneiform Texts**, American Oriental Series 29, New Haven, American Oriental Society, 1945. Reprinted in 1986 and available from Harrassowitz.

[O'C-97] O'CONNOR, J.J. and ROBERTSON, E.F., *Gaspard Clair François Marie Riche de Prony*, April, 1997. Disponible en ligne à l'adresse :

`http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/De_Prony.html`

[Pro] PROCLUS, **Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide**, Desclée de Brouwer, Bruges, 1948, traduction de Paul Ver Eecke, XXIV + 372 p. Réimpression Blanchard. English translation by G. R. Morrow, **A Commentary on the first Book of Euclid's Elements**, Princeton University Press, 1970.

[Pro-01] Gaspard-Clair-François-Marie Riche de PRONY, **Notice sur les grandes tables logarithmiques et trigonométriques, calculées au Bureau du cadastre, sous la direction du citoyen Prony, membre de l'Institut national, et directeur de l'École des Ponts et Chaussées et du Cadastre, avec le rapport sur ces tables et sur l'introduction qui y est jointe, fait à la classe des sciences physiques et mathématiques de l'Institut national** par les citoyens LAGRANGE, LAPLACE et DELAMBRE, Paris, Baudouin, 1801. Numérisé par *Google*.

[Ce document contient trois parties : 1) la notice elle-même, datée du 1^{er} germinal an 9 (pp. 1–8), 2) un supplément sur les corrections à l'*Opus palatinum* de RHETICUS, daté du 21 germinal an 9 (pp. 8–12), en fait un résumé de [Pro-03], 3) un rapport sur les tables par LAGRANGE, LAPLACE et DELAMBRE, daté du 11 germinal an 9 (pp. 13–26).]

[Pro-03] Gaspard-Clair-François-Marie Riche de PRONY, *Éclaircissemens sur un point de l'histoire des tables trigonométriques*, **Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France**, pp. 67–93, 1803–1804.

[Un résumé de cet article est paru dans **The Monthly magazine**, volume 12, 1801, page 231 et dans **L'esprit des journaux**, septembre 1801, pp. 166-167, ainsi que dans [Pro-01].]

[Pto] PTOLÉMÉE, Claude, **Composition mathématique**, traduction de M. Halma, Henri Grand, Paris, 1813. Réédition Blanchard, 1988, 2 volumes.

[Ran-82] RANDELL, Brian, **The origins of Digital Computers**, Springer, 1984.

[Rhe] Georg Joachim RHETICUS and Valentinus OTHO, **Opus palatinum de triangulis**, Neustadt, Matthaeus Harnisch, 1596.

[S-B-79] SCHMANDT-BESSERAT, Denise, *Reckoning Before writing*, **Archeology**, vol. 32, 1979, pp. 23–31.

[S-B-92] SCHMANDT-BESSERAT, Denise, **Before writing, volume 1 : from counting to**

cuneiform, University of Texas Press, Austin, 1992, XV + 269 p.

[Smi-76] SMITH, Adam, **An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations**, Straham et Cadell, 1776. Ed. R. H. Campbell, A.S. Skinner, and W.B. Todd, Oxford, Clarendon Press, 1976. Traduction française **Recherches sur la nature et les causes de la richesse des nations** par Germain Germain, 1802, 1821, revue par Adolphe Blanqui 1843, 1859, 1881 ; rééd. Garnier-Flammarion, 1991, vol.1, GF 598, 531 p., vol.2, GF 626, 637 p.

[Smi-25] SMITH, David Eugene, **History of Mathematics**, Ginn and Company, 1925. Reed. Dover, 1958, vol. 1 XII + 596 p., vol. 2 XII + 725 p. Version électronique téléchargeable.

[Ste-34] STEVIN, Simon, **Œuves mathématiques**, Elsevir, Leyde, 1634. Réédition de *La Disme*, IREM Paris-Sud, 1980.

[Ste-85] STEIN, Dorothy, **Ada Byron, a life and a legacy**, MIT Press, 1985. Traduction française **Ada Byron : La comète et le génie**, Seghers, 1990, 371 p.

[Thu-38] THUREAU-DANGIN, François, **Textes mathématiques babyloniens**, Brill, Leiden, 1938, XL + 243 p. Transcription et traduction. Réédition Irem de Dijon, voir :

`http://www.u-bourgogne.fr/index/front_office/index_co.php?site_id=174&bg=1&rid=1298`.

[Wil-85] WILLIAMS, Michael R., **A History of Computing Technology**, IEEE Computer Society Press, 1985, second edition, 1997, XI + 426 p.

[Zus-36] ZUSE, Konrad, **Verfahren zur selbsttatigen Durchfuhrung von Rechungen mit Hilfe von Rechenmaschinen**, dépôt de brevet allemand Z23624, 11 avril 1936. Partial engl. tr. *Method for Automatic Execution of Calculations with the Aid of Computers* in [Ran-82], pp. 163–173.

[vonF-45] VON FRITZ, Kurt, *The discovery of Incommensurability by Hyppasos of Metapontum*, **Annals of Mathematics**, vol. 48, 1945, pp. 242–264.

1.3 Exercices

Exercice 1.- (**Soustraction**)

La soustraction n'est pas une opération totale sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. On parle de **soustraction complète** lorsqu'on prolonge cette opération par 0 pour un premier opérande plus petit que le second opérande.

Écrire un programme qui calcule la différence complète de l'entier naturel contenu dans le registre e_1 par celui contenu dans le registre e_2 et place le résultat dans le registre s_1.

Exercice 2.- (**Codage des mots par des entiers naturels**)

Exercice 3.- (**Génération des ensembles infinis**)

Nous avons dit que nous avions de la chance car, bien que l'ensemble des opérations calculables par un ordinateur soit infini, toute opération calculable peut être engendrée à partir d'un ensemble fini par un nombre fini de constructeurs d'opérations.

- 1^o) Tout ensemble infini est-il engendré à partir d'un sous-ensemble fini par un nombre fini de constructeurs ?

- 2^o) Tout ensemble dénombrable est-il engendré à partir d'un sous-ensemble fini par un nombre fini de constructeurs ?

Exercice 4.- Nous avons vu que le nombre de programmes et le nombre de fonctions calculables sont infinis.

Se pourrait-il que le nombre de programmes soit infini alors que le nombre de fonctions calculables soit fini ?

Exercice 5.- (**Division par médiation et duplication**)