Chapitre 2

La méthode des tables de vérité en logique propositionnelle

Nous avons vu qu'un raisonnement est une phrase de la forme :

$$A, A', ..., A" \therefore U$$

où $A, A', ..., A", U$ sont des propositions (concrètes, non des formes de propositions). Le problème est de déterminer dans quels cas on peut dire que U *se déduit logiquement* de $A, A', ..., A"$.

La seule chose dont nous soyons sûrs pour l'instant est que ce qui est intéressant n'est pas la signification de $A, A', ..., A"$ et de U mais leurs formes logiques. Aussi à toute argumentation concrète de la forme ci-dessus on associera l'argumentation :

$$\hat{A}, \hat{A}', ..., \hat{A}" \therefore \hat{U}$$

où, par exemple, $\hat{A}$ est l'expression logique (ou, tout au moins, une expression logique) associée à la proposition (composée) A (de la façon que nous avons vue dans le chapitre précédent sur l'analyse des propositions composées). L'argumentation est valide si, et seulement si, à chaque fois que $\hat{A}, \hat{A}', ..., \hat{A}"$ sont vraies alors il en est de même de $\hat{U}$.

Nous allons voir ici une méthode systématique convaincante pour vérifier qu'une argumentation de la logique propositionnelle est valide.

2.1 Valeur de vérité d'une expression logique

Nous avons vu la notion de *table de vérité* pour les connecteurs logiques. On peut étendre de façon naturelle cette notion aux expressions logiques : on cherche le connecteur *principal* de l'expression logique et on applique la table de vérité de celui-ci aux expressions composantes ; pour cela on recommence sur celles-ci, et ainsi de suite.

Remarquons que nous avons décrit ainsi une procédure *récursive* (ou *inductive*), de la même façon que nous avons défini les expressions logiques par une définition récursive (ou inductive).

En pratique on recherche les variables propositionnelles intervenant dans l'expression logique, on construit les premières colonnes de la table de vérité en donnant tous les cas possibles pour les variables propositionneles (il y a donc 2^n lignes s'il y a n variables propositionnelles), on établit les colonnes des sous-expressions logiques ne faisant intervenir qu'un seul connecteur logique, puis les expressions logiques faisant intervenir ces sous-expressions logiques et un connecteur logique, jusqu'à obtenir la colonne de l'expression logique recherchée.

Exemple.- Soit A l'expression logique $(P \to R) \wedge (Q \vee R)$. Établissons sa table de vérité :

	P	Q	R	$P \to R$	$Q \vee R$	$(P \to R) \wedge (Q \vee R)$
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	0	0	1	0
3	1	0	1	1	1	1
4	1	0	0	0	0	0
5	0	1	1	1	1	1
6	0	1	0	1	1	1
7	0	0	1	1	1	1
8	0	0	0	1	0	0

Remarque.- Pour simplifier, on note 1 pour vrai et 0 pour faux.

Vocabulaire.- On dit qu'une expression logique est une **tautologie** si elle est vraie quelle que soit les valeurs de vérité de ses propositions composantes (autrement dit, s'il n'y a que des 1 dans sa colonne de sa table de vérité), que c'est une **contradiction** si elle est fausse quelle que soit les valeurs de vérité de ses propositions composantes (autrement dit, s'il n'y a que des 0 dans sa colonne de sa table de vérité) et, enfin, qu'elle est **amphotère** dans les autres cas (autrement dit, s'il y a à la fois au moins un 1 et au moins un 0 dans sa colonne de sa table de vérité).

2.2 Une méthode pour reconnaître les argumentations valides

2.2.1 Justification

Introduction.- En se rappelant que le calcul propositionnel laisse la structure interne des propositions atomiques non analysées (on ignore la signification qu'elles expriment), imaginons qu'on nous donne, d'une source extérieure au calcul propositionnel, une expression logique A, supposée réalisée. Ce peut être un axiome d'une théorie abstraite (ou le règlement d'un club) ou A peut être vraie en vertu de données physiques ou à titre de conséquence d'un raisonnement mathématique intuitif.

Comment le fait que A soit vraie modifie-t-elle notre position concernant les formules que nous pouvons alors affirmer comme vraies lorsque nous n'utilisons que le calcul propositionnel ?

Exemple.- Ce que représentent les variables propositionnelles P, Q et R apparaissant dans l'expression logique n'a pas d'importance et est ignoré en calcul propositionnel formel. Néanmoins lorsqu'on nous indique que l'expression logique

$$(P \to Q) \wedge (P \vee R)$$

est vraie, on nous indique bien quelque chose, à savoir que les valeurs de vérité de P, Q et R doivent appartenir à l'un des 4 triplets de valeurs de vérité (lignes 1, 2, 5 et 7) qui donnent la valeur 1 à $(P \to Q) \wedge (P \vee R)$ dans la table suivante :

	P	Q	R	$(P \to Q) \wedge (P \vee R)$	$P \to R$	$Q \vee R$
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	0	1	0	1
3	1	0	1	0	1	1
4	1	0	0	0	0	0
5	0	1	1	1	1	1
6	0	1	0	0	1	1
7	0	0	1	1	1	1
8	0	0	0	0	1	0

Ainsi lorsque nous avons à décider quelles autres expressions logiques B sont vraies sur la base du calcul propositionnel et de l'information que A est vraie, nous devons considérer seulement ces quatre **assignations**. Par exemple, lorsqu'on nous donne le renseignement que A est vraie, nous savons que $Q \vee R$ est vraie parce que la table de cette dernière formule a un 1 sur chacune des lignes 1, 2, 5 et 7. Au contraire nous n'avons pas encore assez d'information pour savoir si $P \to R$ est vraie, parce que sa table a un 0 sur la ligne 2.

Ceci nous conduit aux définitions et à la thèse suivantes.

2.2.2 Thèse du calcul propositionnel

Définition 1.- *Soient des expressions logiques A et B de la logique propositionnelle, $P_1, P_2, ..., P_n$ les variables propositionnelles figurant dans A ou dans B (ou dans les deux). On dit que B est une* **conséquence valide** *de A (dans le, ou en vertu du, calcul propositionnel), et on écrit :*

$$A \models B$$

si, et seulement si, dans la table de vérité à 2^n lignes ayant en entrée toutes les valeurs de vérité possibles des atomes $P_1, ..., P_n$, l'expression B a la valeur 1 sur toutes les lignes où A a la valeur 1.

Commentaire.- Ceci peut être pris pour une définition formelle. Mais en fait il s'agit de la **thèse du calcul propositionnel** qui affirme que $A \vdash B$ (notion informelle) si, et seulement si, $A \models B$ (notion fomelle).

Exemple et contre-exemple.- Nous avons vu ci-dessus que :

$$(P \to Q) \wedge (P \vee R) \models Q \vee R,$$

mais que nous n'avons pas :

$$(P \to Q) \wedge (P \vee R) \models P \to R,$$

ce que l'on note quelquefois (sous forme affirmative) :

$$(P \to Q) \wedge (P \vee R) \not\models P \to R.$$

Remarque.- Dans le cas général, on ne travaille pas avec une seule hypothèse mais avec plusieurs hypothèses. Une analyse analogue nous conduit à la définition et à la thèse suivantes.

Définition 2.- *Soient $A_1, \cdots, A_m, B$ des expressions logiques. On dit que B est une* **conséquence valide** *de $A_1, \cdots, A_m$ et on note :*

$$A_1, \cdots, A_m \models B$$

si, et seulement si, dans la table de vérité à 2^n lignes portant en entrée la liste des atomes $P_1, P_2, \cdots, P_n$ figurant dans une au moins des expressions $A_1, \cdots, A_m, B$, l'expression B a la valeur 1 sur toutes les lignes sur lesquelles $A_1, \cdots, A_m$ ont simultanément la valeur 1.

Dit autrement, on a :

Méthode.- Soient $P_1, P_2, \cdots, P_n$ l'ensemble des variables propositionnelles ayant au moins une occurrence dans l'une des expressions logiques $A_1, \cdots, A_m$ ou B.

On construit la table de vérité à 2^n lignes (correspondant à l'ensemble des réalisations possibles pour ces variables propositionnelles) et aux $n+m+1$ colonnes $P_1, P_2, \cdots, P_n, A_1, \cdots, A_m$ et B.

On barre les lignes pour lesquelles soit A_1, soit A_2, $\cdots$, soit A_n a la valeur de vérité Faux.

L'argumentation :

$$A_1, \cdots, A_n \therefore B$$

est valide si, etseulement si, dans les lignes qui restent, B ne prend que la valeur de vérité Vrai.

Remarque.- En pratique, on utilise plus que $n + m + 1$ colonnes, car on y place également des colonnes pour les sous-expressions logiques apparaissant dans les expressions logiques, pour faciliter le calcul de la valeur de vérité de chaque expression logique sur chaque ligne.

Exemple.- *L'argumentation suivante* :

$$p \to q, q \to r \therefore p \to r$$

est-elle valide ?

Établissons la table de vérité adéquate :

	P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$P \to R$
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	0	1	0	0
3	1	0	1	0	1	1
4	1	0	0	0	1	0
5	0	1	1	1	1	1
6	0	1	0	1	0	1
7	0	0	1	1	1	1
8	0	0	0	1	1	1

Barrons les lignes où l'une des hypothèses est fausse, soit les lignes 3 et 4 (à cause de la première hypothèse), 2 et 6 (à cause de la seconde hypothèse) :

	P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$P \to R$
1	1	1	1	1	1	1
2	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
3	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~
4	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~
5	0	1	1	1	1	1
6	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~
7	0	0	1	1	1	1
8	0	0	0	1	1	1

Dans les lignes qui restent, la valeur de vérité de $p \to r$ est toujours vraie, donc *l'argumentation est valide.*

Contre-exemple.- *L'argumentation suivante* :

$$(p \wedge q) \to r, p \therefore r$$

est-elle valide ?

Établissons la table de vérité adéquate :

	P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \to R$
1	1	1	1	1	1
2	1	1	0	1	0
3	1	0	1	0	1
4	1	0	0	0	1
5	0	1	1	0	1
6	0	1	0	0	1
7	0	0	1	0	1
8	0	0	0	0	1

Barrons les lignes où l'une des hypothèses est fausse, soit les lignes 2 (à cause de la première hypothèse), 5, 6, 7 et 8 (à cause de la seconde hypothèse) :

	P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \to R$
1	1	1	1	1	1
2	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{0}$	$\cancel{1}$	$\cancel{0}$
3	1	0	1	0	1
4	1	0	0	0	1
5	$\cancel{0}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{0}$	$\cancel{1}$
6	$\cancel{0}$	$\cancel{1}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{1}$
7	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{1}$	$\cancel{0}$	$\cancel{1}$
8	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{1}$

Dans les lignes qui restent, il en existe ne pour laquelle la valeur de vérité de r est fausse (ligne 4), donc *l'argumentation n'est pas valide.*

2.3 Exercices

2.3.1 Valeur de vérité d'une expression logique

Exercice 1.- *Déterminer parmi les expressions logiques suivantes celles qui sont des tautologies* :

a. $((A \to B) \to B) \to B$
b. $((A \to B) \to B) \to A$
c. $((A \to B) \to A) \to A$
d. $((B \to C) \to (A \to B)) \to (A \to B)$
e. $(A \vee \neg(B \wedge C)) \to ((A \leftrightarrow C) \vee B)$
f. $A \to (B \to (B \to A))$
g. $(A \wedge B) \to (A \vee C)$
h. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow (B \leftrightarrow A))$
i. $(A \to B) \vee (B \to A)$
j. $\neg(A \to B) \to A$

Exercice 2.- *Déterminer, pour chacune des expressions logiques suivantes, si c'est une tautologie, une contradiction, ou si elle est amphotère* :

a. $B \leftrightarrow (B \vee B)$
b. $((A \to B) \wedge B) \to A$
c. $(\neg A) \leftrightarrow (A \wedge B)$
d. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
e. $(A \leftrightarrow \neg B) \to A \vee B$
f. $A \wedge (\neg(A \vee B))$
g. $(A \to B) \to ((\neg A) \vee B)$
h. $(A \to B) \leftrightarrow \neg(A \wedge (\neg B))$
i. $(B \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)) \to A$
j. $A \wedge \neg A \to B$

Exercice 3.- *Si A et B sont vrais et C est faux, quelles sont les valeurs de vérité des expressions logiques suivantes ?* :

a. $A \vee C$
b. $A \wedge C$
c. $\neg A \wedge \neg C$
d. $A \leftrightarrow (\neg B \vee C)$
e. $(B \vee \neg C) \to A$
f. $(B \vee A) \to (B \to \neg C)$
g. $(B \leftrightarrow \neg A) \leftrightarrow (A \leftrightarrow C)$
h. $(B \to A) \to ((A \to \neg C) \to (\neg C \to B))$

Exercice 4.- *Si $A \to B$ est vrai, que peut-on déduire des valeurs de vérité des expressions logiques suivantes ?* :

a. $(A \vee C) \to (B \vee C)$
b. $(A \wedge C) \to (B \wedge C)$
c. $(\neg A \wedge B) \leftrightarrow (A \vee B)$

2.3.2 Implication et équivalence logiques

Exercice 1.- *Déterminer si les paires d'expressions logiques suivantes sont logiquement équivalentes :*

a. $(A \to B) \to A$ et A.
b. $A \leftrightarrow B$ et $(A \to B) \wedge (B \to A)$.
c.$\neg A \vee B$ et $\neg B \vee A$.
d. $\neg(A \leftrightarrow B)$ et $A \leftrightarrow \neg B$.
e. $A \vee (B \leftrightarrow C)$ et $(A \vee B) \leftrightarrow (A \vee C)$.
f. $A \to (B \leftrightarrow C)$ et $(A \to B) \leftrightarrow (A \to C)$.
g. $A \wedge (B \leftrightarrow C)$ et $(A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge C)$

Exercice 2.- *Démontrer que :*

a. $A \to B$ *est logiquement équivalent à* $\neg A \vee B$.
b. $A \to B$ *est logiquement équivalent à* $\neg(A \wedge \neg B)$.

Exercice 3.- *Démontrer que $\mathcal{A}$ est logiquement équivalent à $\mathcal{B}$ si, et seulement si, $\mathcal{A}$ implique logiquement $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ implique logiquement $\mathcal{A}$.*

Exercice 4.- *Quelles sont, parmi les expressions logiques suivantes, celles qui sont logiquement impliquées par $A \wedge B$?*

a. A
b. B
c. $A \vee B$
d. $\neg A \vee B$
e. $\neg B \to A$
f. $A \leftrightarrow B$
g. $A \to B$
h. $\neg B \to \neg A$
i. $A \wedge \neg B$

Exercice 5.- *Quelles sont, parmi les expressions logiques suivantes, celles qui sont logiquement impliquées par $A \to B$?*

a. A
b. B
c. $A \vee B$
d. $\neg A \vee B$
e. $\neg B \to A$
f. $A \leftrightarrow B$
g. $A \to B$
h. $\neg B \to \neg A$
i. $A \wedge \neg B$

Exercice 6.- *Quelles sont, parmi les expressions logiques suivantes, celles qui sont logiquement impliquées par $\neg(A \to B)$?*

a. A
b. B
c. $A \vee B$
d. $\neg A \vee B$

e. $\neg B \rightarrow A$
f. $A \leftrightarrow B$
g. $A \rightarrow B$
h. $\neg B \rightarrow \neg A$
i. $A \wedge \neg B$

Exercice 7.- *Quelles sont, parmi les expressions logiques suivantes, celles qui sont logiquement impliquées par* $A \vee B$?

a. A
b. B
c. $A \vee B$
d. $\neg A \vee B$
e. $\neg B \rightarrow A$
f. $A \leftrightarrow B$
g. $A \rightarrow B$
h. $\neg B \rightarrow \neg A$
i. $A \wedge \neg B$

Exercice 8.- *Quelles sont, parmi les expressions logiques suivantes, celles qui sont logiquement impliquées par* $A \leftrightarrow B$?

a. A
b. B
c. $A \vee B$
d. $\neg A \vee B$
e. $\neg B \rightarrow A$
f. $A \leftrightarrow B$
g. $A \rightarrow B$
h. $\neg B \rightarrow \neg A$
i. $A \wedge \neg B$

Exercice 9.- *Quelles sont, parmi les expressions logiques suivantes, celles qui sont logiquement impliquées par* $\neg(A \leftrightarrow B$?

a. A
b. B
c. $A \vee B$
d. $\neg A \vee B$
e. $\neg B \rightarrow A$
f. $A \leftrightarrow B$
g. $A \rightarrow B$
h. $\neg B \rightarrow \neg A$
i. $A \wedge \neg B$

Exercice 10.- *Quelles valeurs de vérité peut-on déduire de celles indiquées?*

a. $\neg A \vee (A \rightarrow B)$
F
b. $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$
V
c. $(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow \neg C)$
F

d. $(A \underset{\mathrm{F}}{\leftrightarrow} B) \underset{\mathrm{V}}{\leftrightarrow} (C \to \neg A)$

Exercice 11.- *Si $A \leftrightarrow B$ est faux, que peut-on en déduire des valeurs de vérité des expressions logiques suivantes* :

a. $A \wedge B$
b. $A \vee B$
c. $A \to B$
d. $(A \wedge C) \leftrightarrow (B \wedge C)$

Exercice 12.- *Si $A \leftrightarrow B$ est vrai, que peut-on en déduire des valeurs de vérité des expressions logiques suivantes* :

a. $A \wedge B$
b. $A \vee B$
c. $A \to B$
d. $(A \wedge C) \leftrightarrow (B \wedge C)$

Exercice 13.- *Quelles valeurs de vérité peut-on déduire de celles indiquées ?*

a. $(A \wedge B) \underset{\mathrm{F}}{\leftrightarrow} (\underset{\mathrm{F}}{A} \vee B)$

b. $(A \to \neg B) \underset{\mathrm{F}}{\to} (C \to B)$

2.3.3 Lois logiques

Exercice 1.- *Montrer que chaque expression logique de la colonne I est logiquement équivalentes à celle de la colonne II se trouvant sur la même ligne* :

	I	II	
a.	$A \to (B \to C)$	$(A \land B) \to C$	
b.	$A \land (B \lor C)$	$(A \land B) \lor (A \land C)$	(Distributivité)
c.	$A \lor (B \land C)$	$(A \lor B) \land (A \lor C)$	(Distributivité)
d.	$(A \land B) \lor \neg B$	$A \lor \neg B$	
e.	$(A \lor B) \land \neg B$	$A \lor \neg B$	
f.	$A \to B$	$\neg B \to \neg A$	(Contraposition)
g.	$A \leftrightarrow B$	$B \leftrightarrow A$	(Commutativité de l'équivalence)
h.	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C)$	$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$	(Associativité de l'équivalence)
i.	$A \leftrightarrow B$	$(A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$	
j.	$\neg(A \leftrightarrow B)$	$A \leftrightarrow \neg B$	
k.	$\neg(A \lor B)$	$(\neg A) \land (\neg B)$	
l.	$\neg(A \land B)$	$(\neg A) \lor (\neg B)$	
m.	$A \lor (A \land B)$	A	
n.	$A \land (A \lor B)$	A	
o.	$A \land B$	$B \land A$	(Commutativité de la conjonction)
p.	$A \lor B$	$B \lor A$	(Commutativité de la disjonction)
q.	$(A \land B) \land C$	$A \land (B \land C)$	(Associativité de la conjonction)
r.	$(A \lor B) \lor C$	$A \lor (B \lor C)$	(Associativité de la disjonction)

Exercice 2.- a. *Montrer l'équivalence logique de* $\neg(A \to B)$ *et de* $A \land \neg B$.

b. *Montrer l'équivalence logique de* $\neg(A \leftrightarrow B)$ *et de* $(A \land \neg B) \lor (\neg A \land B)$.

c. *Pour chacune des expressions logiques suivantes, trouver une expression logique logiquement équivalente à sa négation et dans laquelle les signes de négation ne s'appliquent qu'à des variables propositionnelles* :

i. $A \to (B \leftrightarrow \neg C)$

ii. $\neg A \lor (B \to C)$

iii. $A \land (B \lor \neg C)$

2.3.4 Raisonnement propositionnel

Exercice 1.- *Déterminez si les argumentations suivantes sont logiquement correctes en formalisant chaque phrase en logique propositionnelle* :

a. Si Paul est communiste alors Jacques est athée. Jacques est athée. Donc Paul est communiste.

b. Si la température et la pression atmosphérique restent constantes alors il ne pleut pas. La température est restée constante. Donc s'il a plu, la pression atmosphérique n'est pas restée constante.

c. Si Tom gagne les élections alors les impôts augmenteront si le déficit demeure élevé. Si Tom gagne les élections, le déficit demeurera élevé. Donc si Tom gagne les élections, les impôts augmenteront.

d. Tom ne peut pas à la fois fumer et être champion de course à pied. Tom n'est pas champion de course à pied. Donc Tom est fumeur.

e. Si Jean conduisait la voiture, Paul est innocent. Si Jacques a tiré alors Paul n'est pas innocent. Donc si Jacques a tiré, Jean ne conduisait pas la voiture.