Chapitre 8

Métalogique

Nous avons vu comment formaliser la notion de *raisonnement*. Dans l'ensemble, nous pouvons être satisfait. Il reste cependant quelques interrogations, appelées **problèmes métalogiques**.

8.1 Introduction aux problèmes métalogiques

8.1.1 Exemples de problèmes métalogiques

Donnons quelques exemples de problèmes métalogiques :

- Nous avons donné la définition des *connecteurs logiques* et rencontré cinq ou six connecteurs naturels. *Qu'en est-il des autres* ?

- Il semble, d'après ce que nous avons dit ensuite, qu'il est inutile de se préoccuper trop des autres connecteurs logiques : les expressions logiques sont suffisantes pour exprimer ce que nous voulons. *Est-ce vrai* ?

- Nous avons vu que l'*implication*, par exemple, est équivalente à une expression logique ne faisant intervenir que la négation et la disjonction. *Tout connecteur logique est-il équivalent à une expression logique ne faisant intervenir que la négation et la disjonction* ?

- On aimait bien à la fin du XIX^e siècle réduire autant que faire se peut. Dans ce cadre se pose la question : *quel est le minimum de connecteurs permettant d'exprimer tous les autres* ? *Un est-il suffisant* ? Nous verrons que ce type de question « philosophique » prend un nouvel essor avec la naissance de l'Informatique.

- Nous avons utiliser les parenthèses pour lever toute ambiguïté sur la lecture des expressions logiques. *L'utilisation des parenthèses est-elle indispensable* ? On retrouve un autre problème de réduction à l'extrême.

- Nous avons présenté, outre la méthode intuitive, deux méthodes formelles pour obtenir les conséquences d'une théorie : la méthode des tables de vérité et le méthode axiomatique. Si on fait fi de l'équivalence intuitive avec la méthode intuitive pour chacun de ces deux méthodes, et donc de l'équivalence entre elles, la question se pose : *ces deux méthodes conduisent-elles au même ensemble de conséquences?*

- Nous avons présenté un système axiomatique, celui de Hilbert-Bernays. Il en existe d'autres, qu'il est facile de montrer équivalents à celui-ci, c'est-à-dire conduisant au même ensemble de conséquences. *Existe-t-il un système axiomatique avec un seul (schéma d') axiome(s)?* sous-entendu avec une (seule) règle d'inférence, car nous avons vu (intuitivement) que l'on ne peut rien déduire si on n'a pas au moins une règle d'inférence de base.

- Nous avons vu qu'une théorie contradictoire n'est pas très intéressante, car on peut en déduire toute expression logique. *La logique propositionnelle est-elle contradictoire?*

8.1.2 Méthode de la métalogique

Nous avons que la logique (élémentaire) a pour but de justifier les (bonnes) méthodes de démonstration à partir de quelques exemples intuitifs d'argumentations que bous considérons comme valides. La logique est, de ce fait, considérée comme précédant toute science, y compris les mathématiques. On ne doit donc pas faire appel à des connaissances mathématiques pour fonder la logique.

Une fois la logique (élémentaire) bien établie, on peut développer les autres disciplines scientifiques, et en particulier les mathématiques.

Par contre les problèmes métalogiques ne se résolvent pas dans un *a priori* total. On sait en résoudre certains, de façon convaincante, en faisant appel à un développement, d'ailleurs peu conséquent, des mathématiques.

8.2 Réduction des connecteurs logiques

Intéressons-nous à un premier type de problèmes métalogiques : ceux autour de la réduction du nombre de connecteurs logiques que l'on prend pour base.

8.2.1 Réduction à la négation, la disjonction et la conjonction

Définition 1.- On appelle ensemble des **booléens** $\mathbb{B}$ l'ensemble des deux valeurs de vérité : le *vrai* et le *faux*.

Définition 2.- Pour un entier naturel n, on appelle **fonction de vérité n-aire** toute application à n variables de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$, c'est-à-dire toute application de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{B}$.

On appelle **fonction de vérité** toute fonction de vérité n-aire, pour un certain entier naturel n.

Représentation des fonctions de vérité – Tables de vérité.- Soit $f(x_1, , x_n)$ une fonction de vérité. Alors f peut être représentée par une table de vérité à 2^n lignes, dans laquelle chaque ligne représente une assignation $a_1, , a_n$ de valeurs de vérité aux variables $x_1, , x_n$, suivie de la valeur correspondante de $f(a_1, , a_n)$.

Exemple.- Établir la table de vérité de la fonction de vérité f définie par l'expression logique :

$$f(P, Q) = P \vee (P \to Q).$$

Théorème.- Toute fonction de vérité est équivalente à une expression logique ne contenant que les connecteurs de négation, de disjonction et de conjonction.

Démonstration.- Soit $f(x_1, , x_n)$ une fonction de vérité. Considérons sa table de vérité. Pour $1 \leq i \leq 2^n$, notons C_i la conjonction $U_1^i \wedge U_2^i \cdots \wedge U_n^i$, où U_j^i est A_j si, dans la i-ième ligne de la table de vérité, x_j prend la valeur V, et U_j^i est $\neg A_j$ si x_j prend la valeur F dans cette ligne. Soit D la disjonction de tous les C_i pour lesquels f a la valeur V pour la i-ème ligne de la table de vérité ; s'il n'existe aucune telle ligne alors f prend toujours la valeur F et nous prendrons pour D l'expression $A_1 \wedge \neg A_1$, qui satisfera le théorème. Remarquons que D ne fait intervenir que $\neg, \wedge$ et $\vee$. Pour voir que D a f comme fonction de vérité correspondante, considérons une assignation de valeurs de vérité donnée à $A_1, , A_n$, et supposons que cette même assignation donnée aux variables $x_1, , x_n$ corresponde à la ligne k de la table de vérité de f. Alors C_k a la valeur T pour cette assignation, alors que chaque autre C_i a la valeur F. Si f a la valeur V pour cette ligne k, alors C_k apparaît dans la disjonction D. Ainsi, D doit aussi avoir la valeur V pour cette assignation. Si f a la valeur F pour la ligne k alors C_k n'apparaît pas dans la disjonction D et tous les termes prennent la valeur F pour cette assignation. Ainsi D a aussi la valeur F. En conclusion, D donne la fonction de vérité de f. CQFD

Exemples.- 1^o) Considérons la fonction f définie par la table de vérité :

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
V	V	F
F	V	V
V	F	V
F	F	V

alors D est $(\neg A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge \neg A_2) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2)$.

2^o) Considérons la fonction g définie par la table de vérité (dans laquelle on remplace 'V' par 'T') :

x_1	x_2	x_3	$g(x_1, x_2, x_3)$
T	T	T	T
F	T	T	F
T	F	T	T
F	F	T	T
T	T	F	F
F	T	F	F
T	F	F	F
F	F	F	T

alors D est $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3)$.

Exercice.- Trouver des expressions logiques ne faisant intervenir que les connecteurs logiques $\neg, \wedge$

et $\vee$ dont les fonctions de vérité sont les suivantes :

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	$g(x_1, x_2, x_3)$	$h(x_1, x_2, x_3)$
T	T	T	T	T	F
F	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	F
T	T	F	F	T	T
F	T	F	F	F	T
T	F	F	F	T	F
F	F	F	T	F	T

8.2.2 Réduction à d'autres systèmes de connecteurs

Corollaire 1.- *Toute fonction de vérité peut être repésentée par une expression logique ne contenant que les connecteurs $\wedge$ et $\neg$, ou que les connecteurs $\vee$ et $\neg$ ou que les connecteurs $\rightarrow$ et $\neg$.*

Démonstration.- Remarquons que $B \vee C$ est logiquement équivalent à $\neg(\neg B \wedge \neg C)$. On peut donc remplacer chaque occurrence de $\vee$ par une expression logique (un peu plus compliquée) ne faisant intervenir que les connecteurs logiques $\wedge$ et $\neg$. Ainsi toute expression logique en $\wedge, \vee$ et $\neg$ est logiquement équivalente à une expression logique ne faisant intervenir que $\wedge$ et $\neg$.

Les autres résultats du corollaire sont de même des conséquences des tautologies suivantes :

$$(B \wedge C) \leftrightarrow \neg(\neg B \vee \neg C)$$
$$(B \vee C) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow C)$$
$$(B \wedge C) \leftrightarrow \neg(B \rightarrow \neg C)$$

Définition.- Les connecteurs logiques *nand* (pour *négation de la conjonction*) et *nor* (pour *négation de la disjonction*) sont définis par leurs tables de vérité :

x_1	x_2	x_1 *nand* x_2	x_1 *nor* x_2
V	V	F	F
F	V	V	F
V	F	V	F
F	F	V	V

Corollaire 2.- *Toute fonction de vérité peut être repésentée par une expression logique ne contenant que le seul connecteur nand ou que le seul connecteur nor.*

Démonstration.- C'est une conséquence des tautologies suivantes :

$$\neg A \leftrightarrow (A \textit{ nand } A)$$
$$(A \vee B) \leftrightarrow ((A \textit{ nand } A) \textit{ nand } (B \textit{ nand } B))$$
$$\neg A \leftrightarrow (A \textit{ nor } A)$$
$$(A \wedge B) \leftrightarrow ((A \textit{ nor } A) \textit{ nor } (B \textit{ nor } B))$$