Histoire de la logique élémentaire

Patrick Cégielski

Septembre 2016

Pour Irène et Marie

Legal Notice

Université Paris 12 - IUT de Sénart-Fontainebleau
Route forestière Hurtault
F-77300 Fontainebleau
cegielski@u-pec.fr

Préface

Le sujet abordé ici est la **logique** (c'est-à-dire en gros l'art de raisonner) sous sa forme **élémentaire**, par opposition aux extensions ou aux variations de celle-ci, objet de ce qu'on appelle la **logique philosophique** (bien que très mathématisée et qui devient d'ailleurs souvent *logique pour l'intelligence artificielle*) et **logique mathématique** (dont l'un des premiers résultats fut le célèbre théorème d'incomplétude de Gödel en 1931).

Cette logique élémentaire fut créée (sous une forme qui nous apparaît de nos jours comme partielle) par ARISTOTE au cinquième siècle avant Jésus-Christ et fut enseignée sous la forme qu'il en donnât, presque sans changement majeur, jusqu'au milieu du XIX^e siècle, en schématisant un peu bien sûr. On appelle de nos jours **logique classique** cette logique élémentaire-là et on ne s'en occupe plus vraiment (sauf quelques historiens). Il est inutile d'en connaître ne serait-ce que quelques éléments pour aborder ce qu'on a appelé au début la **logique moderne**, aussi n'aborderons-nous pas l'historique de la logique classique, par ailleurs suffisamment traitée.

L'objet de ce livre est de donner les textes importants de façon aussi exhaustive que possible, la bibliographie primaire et quelques références à la bibliographie secondaire. Notre but est d'aider ceux qui connaissent déjà la discipline en question (d'ailleurs élémentaire) et qui voudraient la dominer en abordant les maîtres fondateurs dans le texte.

Notes bibliographiques

La logique intuitive est exposée comme l'un des premiers chapitres de n'importe quel manuel de mathématiques. Son axiomatisation sous une forme élémentaire (en ne supposant pas déjà développée une bonne partie des mathématiques, puisque le but est justement de fonder celles-ci) est beaucoup moins souvent abordé ; il n'en existe pas de bon exposé. On pourra cependant consulter le premier chapitre de [KLE-67].

Sur la logique philosophique on pourra consulter (à un niveau élevé) [G-F-83]. Pour une introduction en français voir [THA-88].

Pour une introduction à la logique mathématique (jusque vers 1935) on pourra consulter le livre de Kleene cité ci-dessus. Pour un état en 1977 voir [BAR-77].

Pour une histoire de la logique classique (et de la logique moderne jusque vers 1910), on peut consulter [BLA-70].

Table des matières

Chapitre 1

Notion de logique

1.1 Notion de raisonnement

1.1.1 Les premières démonstrations

L'hypothèse la plus probable est que la notion de *démonstration* est née à propos de la géométrie.

1.1.1.1 La méthode empirique en géométrie

L'historien grec HÉRODOTE pense que la géométrie (de *géo*, terre, et *metros*, mesure, c'est-à-dire l'arpentage) est née en Égypte :

> *Ce roi* [Sésotris]*, disaient les prètres, partagea le sol entre tous les Égyptiens, attribuant à chacun un lot égal aux autres, carré, et c'est d'après cette répartition qu'il établit ses revenus, prescrivant qu'on payât une redevance annuelle. S'il arrivait que le fleuve enlevât à quelqu'un une partie de son lot, celui-là venait le trouver et lui signalait ce qui s'était passé ; lui envoyait des gens pour examiner et mesurer de combien le terrain était amoindri, afin qu'il fût fait à l'avenir une diminution proportionnelle dans le paiement de la redevance fiscale. C'est ce qui donna lieu, à mon avis, à l'invention de la géométrie, que les Grecs rapportaient dans leur pays.*
>
> [Hérodote], II, 109

Le mot *carré* du texte veut dire de forme géométrique simple et non carré au sens moderne du mot.

On peut supposer que les premiers géomètres égyptiens découvrirent dans les formes de leurs champs des figures remarquables (en ce sens qu'elles sont esthétiques, ou particulièrement simples à décrire ou à mesurer) qu'ils appellent *triangle, rectangle, cercle, ovale*, ... et qu'ils les définissent par analogie, comme on le fait de nos jours dans les classes primaires. Qu'à partir de là, ils découvrent des propriétés remarquables telles que celle de Pythagore [*dans un triangle rectangle la somme des carrés des deux côtés adjacents à l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse*], en remarquant cette propriété sur un champ en forme de triangle rectangle, puis qu'ils la rencontrent pour un autre et qu'alors ils généralisent cette constation pour en faire une *loi* (de la même façon que nous dégageons les lois de la physique élémentaire). Enfin qu'ils sont charmés par de telles lois et qu'ils en font des recueils. Mais le nombre de lois devient très vite important et fait donc un appel important à la mémoire pour les retenir.

1.1.1.2 Naissance de la méthode déductive en géométrie

On peut supposer qu'alors un géomètre particulièrement astucieux découvre, qu'en fait, certaines de ces lois se déduisent de certaines autres, sans avoir besoin de sortir de chez soi pour faire des relevés et avec le seul recours du *raisonnement.* La notion de *théorème* est née à ce moment et inaugure l'époque d'une méthode, celle de la *méthode déductive* [1].

Une certaine lecture du livre [Proclus] de Proclus (néoplatonicien, 412–486) peut laisser entendre que c'est Thalès (640–546 av. J.-C.) qui a démontré le premier théorème de géométrie mais ceci peut tout aussi bien se lire comme dégagement d'une loi. En tous les cas cette méthode connaît son apogée avec les *Éléments* d'Euclide [Euclide] (III^e siècle av. J.-C.) qui sont considérés comme le modèle par excellence, insurpassable et même égalable difficilement, pendant près de vingt siècles.

1.1.2 Naissance de la logique : Aristote

Mais si les géomètres font des démonstrations, ils ne s'intérogent pas sur la façon de les faire de façon générale. Quelques géomètres donnent bien des méthodes remarquables de démonstrations, de façon isolée, mais aucun ne fait d'étude systématique avant le philosophe grec Aristote (384–322 av. J.-C.).

Après sa mort, ses élèves rassemblèrent un certain nombre de ses écrits sous le nom d'*Organon* (c'est-à-dire instrument [des sciences]). Aristote écrit fièrement :

> *Dans le cas de toutes les découvertes les résultats des premiers chercheurs qui ont été transmis à d'autres ont été améliorés peu à peu par ceux qui les ont reçus, tandis que les découvertes originales font généralement une avancée qui est petite à première vue, bien que beaucoup plus utile que le développement qui les suit plus tard. Car, comme on dit, en chaque chose : « le premier pas est le principal », et pour cette raison aussi le plus difficile.* [...]
>
> *De cette enquête, cependant, aucun travail n'avait été fait auparavant. Rien n'existait du tout.*
>
> *Soph. El.*, 34, 183b 17–23 et 34–36

Nous renvoyons aux histoires de la logique classique pour une atténuation de la dernière phrase.

Le mot *logique* lui-même n'est utilisé dans son sens actuel que plus tard. Chrysippe (281–208 av. J.-C., ancien stoïcien) divise la philosophie en trois branches dont l'une est nommée *ta logika the$\bar{o}$r$\bar{e}$mata* : les théorèmes logiques. Cicéron, qui a recueilli l'enseignement des stoïciens,

1. Pour une critique de cette hypothèse lyrique *a priori*, critique fondée sur des documents historiques plus approfondis, on peut consulter [VER-65, SZA-77, SZA-00].

emploie le terme (latinisé) avec le sens que nous lui donnons aujourd'hui. Auparavant la logique est appelée *dialectique* (Platon) ou *analytique* (Aristote).

1.2 Le besoin d'une logique mathématisée au XIX^e siècle

C'est une chose de décrire *a posteriori* l'origine des notions modernes, une fois qu'elles se sont bien stabilisées et que leur essence est bien comprise ; c'en est une autre que de trouver les vraies raisons profondes qui ont conduit les auteurs à les dégager (sous une forme plus ou moins implicite).

Ces deux problèmes sont de toute façon bien distincts et poursuivent des buts différents. Dans le premier cas, on veut juste faire l'*historique* d'une discipline que l'on connaît bien, pour la dominer encore plus. Dans le second cas, on essaie de faire de l'*histoire des mentalités*.

Il est de l'opinion de l'auteur que l'historique (dans son sens scientifique, avec des références précises) doit précéder l'histoire, pour laquelle, en plus du fait que des documents utilisables manquent cruellement, rares sont les mathématiciens livrant leurs raisons profondes à nu. Sinon on ne fait que de la mauvaise *historiographie*, plus ou moins plaisante, plus ou moins brillante, flattant toujours le lecteur, mais ayant un rapport lointain avec une science véritable.

Pour ma part je me réserve pour plus tard une véritable histoire de la logique. Cependant pour que le lecteur ait (la flatteuse impression d'avoir) une vue d'ensemble, commençons par donner un panorama de ce renouveau de la logique au XIX^e siècle, tout en notant que celui-ci ne doive pas être considéré comme un résumé de travaux scientifiques certains.

1.2.1 Développement des mathématiques

Un survol alerte du développement des mathématiques, insistant sur le problème des fondements de celles-ci, se trouve dans les onze premiers chapitres du classique [KLI-80], dont la partie purement factuelle est un résumé de [KLI-72], ouvrage dans lequel les références sont souvent citées. Il est difficile de résumer ce survol, que, de toute façon, le lecteur connaît certainement grâce à Kline ou une autre histoire générale des mathématiques.

Disons essentiellement que tout est parti de l'Analyse (le calcul différentiel et intégral), introduite au XVII^e siècle puis appliquée à de nombreux problèmes concrets (dont la retombée la plus célèbre est la découverte de Neptune en 1846 par Leverrier et Adams). On s'interroge très peu sur ses fondements au début, sans ignorer pour autant certaines difficultés rencontrées (comme le problème du logarithmes des nombres négatifs), qui conduisent à des paradoxes, mais dont on rejette l'étude à plus tard. On commence à s'interroger vraiment sur ses fondements à la fin du XVIII^e siècle et ceci pour plusieurs raisons : peut-être que le nombre de découvertes décélère, ce qui laisse plus de temps pour réfléchir à autre chose ; le nombre de paradoxes augmente ; l'esprit des lumières l'exige (les premières réflexions paraissent dans l'*Encyclopédie*) ; mais surtout, et c'est certainement la raison essentielle, à cause d'un enseignement de grande envergure (je veux dire concernant beaucoup d'étudiants) dans les Grandes Écoles françaises, puis plus tard à l'université. Il faut alors être tout à fait explicite.

La première étape est de ramener toutes les notions utilisées en Analyse à une seule d'entre elles, celle de *limite*, et on connait l'influence du fameux *Cours d'Analyse* de Cauchy (1821) pour celle-ci. Il faut alors justifier les propriétés sur les limites, ce qui est fait en dégageant les propriétés essentielles de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Les mécomptes avec la Géométrie (la naissance des géométries non euclidiennes) exigent d'établir les propriétés concernant les réels de façon autonome. C'est la fameuse *arithmétisation de l'Analyse* (et plus généralement des Mathématiques), en partant de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, et construisant successivement les ensembles $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ des rationnels, pour aboutir à $\mathbb{R}$ et à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. L'ensemble $\mathbb{N}$ est entièrement déterminé par les fameux *axiomes de Peano*, mais les constructions successives demandent un recours à une *théorie des ensembles* implicite qu'il faut expliciter. D'un autre côté la logique sous-jacente de ces nouvelles mathématiques doit être dégagée (sinon justifiée), la logique classique d'Aristote ne suffisant plus. Et voila l'apparition de la logique moderne.

1.2.2 George Boole (1815–1864)

Le premier logicien qui nous intéresse est George Boole (1815–1864). Son œuvre logique comprend *L'analyse mathématique de la logique* (1847, [BOO-47]), *Les lois de la pensée* (1854, [BOO-54]) et les inédits publiés dans [BOO-52]. Le but de Boole, comme l'indique d'ailleurs clairement le titre de son premier livre, est de *mathématiser* la logique classique d'Aristote. En effet celle-ci est complète pour le domaine (restreint à nos yeux contemporains) logique qu'elle envisage, mais elle comprend beaucoup trop de règles pour l'application à des situations concrètes. Boole redessine entièrement cette logique, en la fondant sur un nombre très restreint de principes, ce qui permet d'arriver plus rapidement et plus sûrement au même résultat. Nous dirions de nos jours qu'il trouve un nouvel algorithme, améliorant la complexité du problème.

Nous allons revenir dans le corps de l'exposé plus en détail sur ses contributions à ce qu'on appelle de nos jours le *calcul propositionnel*. Une monographie en français [DIA-89] lui est consacrée.

1.2.3 Augustus De Morgan (1806–1871)

Le principal apport d'Augustus De Morgan (1806–1871) est de s'apercevoir que la logique classique d'Aristote est trop restreinte. Il introduit alors la *théorie des relations* (1860), c'est-à-dire ce que Russell appelle plus tard les *fonctions propositionnelles*. Il découvre également les fameuses « lois de De Morgan ».

1.2.4 Hugh Mc Coll (1837–1909)

1.2.5 Schröder (1841–1902)

1.2.6 Gottlob Frege (1848–1925)

Gottlob Frege (1848–1925) sera intrigué toute sa vie par les fondements de l'arithmétique, c'est-à-dire notre ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Dans la *Begriffschrift* de 1879 [FRE-79], il crée un langage formel (notre logique du premier ordre, à quelques détails près) qui lui permet d'exprimer l'arithmétique et sa logique sous-jacente comme un jeu formel dont toutes les règles sont bien déterminées. Dans *les fondements de l'arithmétique* de 1884 [FRE-84], il explique ses conceptions en langage courant, tout en faisant un historique critique des essais de fondement de l'arithmétique. En 1893 et 1903, les *lois fondamentales de l'arithmétique* [FRE-93, FRE-03] reprennent son exposé formel (amélioré) plus en détail. Bertand Russell lui communique le 16 juin 1902 [RUS-02], alors que [FRE-03] est en cours d'impression, que le système d'axiomes choisi est contradictoire. Frege essaie, sans y parvenir, de le rectifier jusqu'à la fin de sa vie (quelques articles parus de son vivant et surtout œuvre posthume). Son apport (immense) à la logique va être étudié en détail dans la suite.

1.2.7 Giuseppe Peano (1858–1932)

1.2.8 Bertand Russell (1872–1970)

Bertrand Russell (1872–1970) fait vraiment connaître la logique moderne et son application aux mathématiques, d'abord dans ses *Principles of Mathematics* (1903, [RUS-03]), puis les trois volumes des *Principia Mathematica* (1910–1913, [WR-10]), son livre de vulgarisation *Introduction à la philosophie mathématique* (1918, [RUS-18]) et enfin de nombreux articls et opuscules.

Chapitre 2

Historique du calcul propositionnel

2.1 La naissance du calcul propositionnel

2.1.1 Notion de proposition

Le fait qu'une proposition soit quelque chose qui est vrai ou faux est remarqué par ARISTOTE. Il commence par définir ce qu'est une phrase, à savoir une énonciation qui possède un sens, puis distingue parmi les phrases celles qui sont des propositions de celles qui n'en sont pas.

> *Le discours est un son vocal* [*possédant une signification conventionnelle*]*, et dont chaque partie, prise séparément, présente une signification comme énonciation et non pas comme affirmation* [*ou négation*]*. Je veux dire que, par exemple, le mot homme signifie bien quelque chose, mais non pas cependant qu'il est ou qu'il n'est pas : il n'y aura affirmation ou négation que si on ajoute autre chose. Toutefois une seule syllabe du mot homme ne signifie rien, pas plus que, dans souris, la syllabe ris n'est significative ; en fait, ce n'est qu'un son. C'est seulement dans les mots composés que la syllabe est significative, bien que ce ne soit pas par elle-même, ainsi que nous l'avons dit plus haut.*
>
> *Tout discours a une signification, non pas toutefois comme un instrument naturel, mais, ainsi que nous l'avons dit, par convention. Pourtant tout discours n'est pas une proposition, mais seulement le discours dans lequel réside le vrai ou le faux, ce qui n'arrive pas dans tous les cas : ainsi la prière est un discours, mais elle n'est ni vraie, ni fausse. Laissons de côté les autres genres de discours : leur examen est plutôt l'œuvre de la Rhétorique ou de la Poétique. C'est la proposition que nous avons à considérer pour le moment.*
>
> *De interpretatione*, c.4, 16b26 sq., tr. fr. Tricot, p. 83

Mais ceci n'est jamais noté comme quelque chose d'essentiel, sur laquelle il faille beaucoup insister. Il en est encore de même pour BOOLE qui reprend, de ce point de vue, la notion aristotélicienne :

> *Une proposition est une phrase qui affirme ou qui nie, par exemple : « tous les Hommes sont mortels », « aucune créature n'est indépendante ».*
>
> [BOO-47], ch. II
>
> *Si nous nous bornons à une proposition X donnée et nous ne faisons pas intervenir d'autres considérations, alors deux cas seulement sont concevables : 1o) la proposition donnée est vraie ; 2o) la proposition donnée est fausse.*
>
> [BOO-47], ch. V

Hugh MC COLL est peut-être le premier à prendre conscience de l'importance des notions de proposition, de vrai et de faux, puisqu'il les réunit dans une définition initiale, sans cependant essayer d'éclaircir ces notions, certainement supposées connues par l'enseignement de la logique classique.

> *DÉFINITION 1.- Considérons des symboles, disons A, B, C, etc., qui dénotent des énoncés (ou propositions) placés par commodité de référence dans une table. Alors l'équation $A = 1$ dit que l'énoncé A est vrai ; l'équation $A = 0$ que l'énoncé A est faux ; et l'équation $A = B$ que A et B sont des énoncés équivalents.*
>
> [McC-77], p. 9

Nous appellerions plutôt de nos jours *formule* ce qu'il appelle *équation*. On remarquera qu'aucune définition n'est donnée pour expliquer ce qu'il entend par énoncés équivalents.

Bertrand RUSSELL est assez clair en 1903 :

> *M. McColl, dans une importante série d'articles, a soutenu le point de vue que l'implication et les propositions sont plus fondamentales que l'inclusion et les classes ; et, en cela, je suis d'accord avec lui. Mais il me semble qu'il n'a pas réellement conscience de la distinction entre les propositions véritables et celles contenant une variable réelle [i.e. libre] : ainsi il est conduit à parler de propositions quelquefois vraies et quelquefois fausses, ce qui est bien sûr impossible pour une proposition véritable. Comme cette distinction a une très grande importance, je m'étendrai sur elle avant d'aller plus loin. Nous pouvons dire qu'une proposition est quelque chose qui est vrai ou qui est faux. Une expression telle que « x est un homme » n'est pas une proposition, car elle n'est ni vraie ni fausse. Si nous donnons à x une valeur constante alors cette expression devient une proposition.*
>
> [RUS-03], §13, pp. 12–13

Cependant ceci n'est pas encore suffisamment mis en exergue dans ce livre. Et surtout il ne reprend pas cette discussion dans son traité de 1914.

HILBERT fait la différence entre logique propositionnelle (sous le nom de *calcul des énoncés*) et logique des prédicats dans un livre didactique de 1928 :

> *Une première partie indispensable de la logique mathématique est le calcul des énoncés. Par énoncé on doit comprendre une expression assez signifiante pour pouvoir dire si son contenu est vrai ou faux. Des exemples d'énoncés sont : « les Mathématiques sont une science », « la neige est noire », « 9 est un nombre premier ». Dans le calcul des énoncés nous ne serons pas concernés par la structure logique interne des énoncés [...] mais nous considèrerons les énoncés comme des touts dans leur combinaison logique avec d'autres énoncés.*

[H-A-28], ch. I, Introduction

Pas plus que ses prédécesseurs, FREGE n'essaie de définir correctement les notions de *proposition* et de *valeur de vérité* (tout au moins dans ses premiers écrits). Mais il fait un pas décisif en distinguant nettement entre l'énoncé d'une proposition (« simple combinaison d'idées ») et son affirmation (« jugement ») : ainsi une proposition énoncée peut être considérée comme vraie ou fausse ; il faut faire quelque chose de plus pour dire si elle est vraie ou fausse.

> *Un jugement sera toujours exprimé au moyen du signe*
>
> $$|----,$$
>
> *qui se place à gauche du signe, ou de la combinaison de signes, indiquant le contenu du jugement. Si nous omettons le petit trait vertical à l'extrémité gauche du trait horizontal, le jugement sera transformé en une simple combinaison d'idées, par laquelle celui qui écrit n'affirme pas qu'il sait si elle vraie ou non. Par exemple, soit*
>
> $$|----A$$
>
> *le jugement « des pôles magnétiques opposés s'attirent mutuellement » ; alors*
>
> $$----A$$
>
> *n'exprimera pas ce jugement ; il a simplement pour but d'exprimer au lecteur l'idée de l'attraction mutuelle des pôles magnétiques opposés, afin d'en déduire des conséquences et de tester par ce moyen si la proposition est correcte. Quand le trait vertical est omis nous l'exprimerons, en paraphrasant, en utilisant les expressions « la circonstance que » ou « la proposition que ».*
>
> *Une combinaison de signes ne devient pas un jugement parce que* $|----$ *est écrit devant ; par exemple il en est ainsi pour « maison ». Nous distinguerons donc entre les combinaisons de signes qui peuvent devenir un jugement de celles qui ne le peuvent pas.*
>
> *Le trait horizontal du signe* $|----$ *combine les signes qui le suivent en une totalité, et l'affirmation exprimée par le trait vertical à l'extrémité gauche du trait horizontal porte sur cette totalité.*

[FRE-79], §2

2.1.2 Notion de proposition composée et de connecteur

Il est évidemment difficile de dégager les notions de *proposition composée* et de *connecteur* avant que celle de *proposition* le soit. On peut cependant trouver quelques essais implicites chez les premiers auteurs.

La conception du calcul des propositions comme étude des propositions composées et de leurs valeurs de vérité est patente chez BOOLE :

> *Une proposition hypothétique est définie par deux propositions catégoriques, au moins, unies par une copule (ou conjonction). Les différentes sortes de propositions hypothétiques sont nommées d'après leurs conjonctions respectives, à savoir conditionnelle (si), disjonction (l'une ou l'autre, ou), etc.*

[BOO-47], ch. V

Il suffit de remplacer dans ce texte « proposition hypothétique » par « proposition composée » et « proposition catégorique » par « proposition » ou « proposition atomique » pour obtenir un exposé moderne. On remarquera cependant que la négation ne rentre pas dans le cadre général puisqu'elle relie une seule proposition et non au moins deux.

La conception du calcul des propositions comme calcul de valeurs de vérité est énoncée à propos de l'implication :

> *Avec les propositions conditionnelles, la proposition catégorique d'où les autres se déduisent est appelée l'*antécédent*; la proposition qui en résulte est appelée le* conséquent.
>
> *Il y a deux formules, et seulement deux formules, du syllogisme conditionnel :*
>
> *1º le constructif :*
>
> *Si A est B, alors C est D,*
>
> *Mais A est B donc C est D;*
>
> *2º le destructif :*
>
> *Si A est B, alors C est D,*
>
> *Mais C n'est pas D, donc A n'est pas B.*
>
> [...]
>
> *Si nous examinons l'une ou l'autre forme du syllogisme conditionnel donné cidessus, nous constatons que la validité de l'argument ne dépend pas des considérations se rapportant aux termes A, B, C et D considérés comme représentatifs des individus ou des classes. En fait, nous pouvons représenter les propositions A est B, C est D par les symboles arbitraires X et Y respectivement, et exprimer notre syllogisme en des formes telles que les suivantes :*
>
> *Si X est vrai, alors Y est vrai,*
>
> *Or X est vrai, donc Y est vrai.*
>
> *Ainsi, ce que nous avons à considérer ne concerne ni les objets ni les classes d'objets mais l'exactitude des propositions élémentaires comprises dans les termes de nos prémisses hypothétiques.*
>
> [BOO-47], ch. V

La notion générale de connecteur n'a été dégagée que bien plus tard, en 1950 par William Van Ornam Quine, et ceci sous deux aspects différents : grâce à la notion générale de *table de vérité* et par la distinction entre *connecteur* et *connecteur logique* (sous les noms respectifs de *composé* et de *fonction de vérité*).

> *Tout ce qui est strictement nécessaire à une compréhension précise de la négation, de la conjonction et de la disjonction est énoncé dans ces lois :*
>
> *'$\overline{p}$' est vrai si et seulement si 'p' est faux.*
>
> *'pq ... s' est vrai si et seulement si tous les composants 'p', 'q', ... ,'s' sont vrais.*
>
> *'$p \vee q \vee ... \vee s$' est vrai si et seulement si 'p', 'q', ... , 's' ne sont pas tous faux.*
>
> *Or il est évident d'après ces lois que la négation, la conjonction et la disjonction partagent l'importante propriété suivante : pour être en mesure de déterminer la vérité ou la fausseté d'une négation, d'une conjonction ou d'une disjonction, il suffit de connaître la vérité ou la fausseté de leurs parties constitutives.*
>
> *Il est commode d'appeler la vérité et la fausseté des* valeurs de vérité*; on dit alors que la valeur de vérité d'un énoncé est la vérité ou la fausseté selon que l'énoncé est vrai ou faux. Ce qu'on vient d'observer un peu plus haut, c'est donc que la valeur de vérité d'une négation, d'une conjonction ou d'une disjonction est déterminée*

par les valeurs de vérité de ses composants. On exprime cet état de choses en appelant la négation, la conjonction et la disjonction des fonctions de vérité*. En général, on dit qu'un composé est une* fonction de vérité *de ses composants si sa valeur de vérité est déterminée dans tous les cas par les valeurs de vérité des composants. Plus précisément : une façon de former des énoncés composés à partir d'énoncés composants est dite* vérifonctionnelle *si les composés ainsi formés ont toujours des valeurs de vérité correspondantes aussi longtemps que leurs composants ont des valeurs de vérité correspondantes.*

La propriété dont jouissent ainsi la négation, la conjonction et la disjonction d'être des fonctions de vérité peut être mieux appréciée si l'on examine par contraste un énoncé qui n'est pas une fonction de vérité :

Pierre mourut parce qu'il mangea du poisson avec de la crème glacée.

Même si l'on accorde que les composants 'Pierre mourut' et 'Pierre mangea du poisson avec de la crème glacée' sont vrais, on peut encore discuter sur la valeur de vérité de ce composé. Sa valeur de vérité en effet n'est pas déterminée simplement par les valeurs de vérité de ses composants, mais par celles-ci en liaison avec d'autres considérations ; et ces considérations complémentaires sont certes très obscures.

[...]

Toute fonction de vérité particulière peut être décrite adéquatement au moyen d'une énumération montrant quelles valeurs de vérité prendra le composé pour chaque choix des valeurs de vérité des composants. De fait, c'est ainsi que nos trois fonctions fondamentales de vérité ont été elles-mêmes brièvement décrites dans les premières lignes de cette section. Tout symbole non familier se rapportant à une quatrième fonction de vérité pourrait de même façon être introduit et correctement expliqué en spécifiant quelles valeurs de vérité sont requises des composants pour rendre le nouveau composé vrai et quelles autres pour le rendre faux.

[QUI-50], §2

2.1.3 Les connecteurs naturels

2.1.3.1 Chez Boole

On ne peut pas dire que Boole dégage réellement les connecteurs naturels. Son mathématisme le conduit cependant à considérer l'analogue de la *disjonction*, en fait la *disjonction exclusive*, représentée par le signe "+", la *conjonction*, représentée par le signe ".", et la *négation*, représentée par $1 - x$. Il n'y a pas de signe pour l'*implication*.

Si nous nous bornons à une proposition X donnée et si nous ne faisons pas intervenir d'autres considérations, alors deux cas seulement sont concevables : 1°) la proposition donnée est vraie ; 2°) la proposition donnée est fausse. Comme ces cas constituent à eux deux l'ensemble de la proposition, puisque le premier est déterminé par le symbole facultatif [elective en anglais] *x, le second sera déterminé par le symbole (1-x).*

Mais si d'autres considérations sont admises, ces cas seront solubles en d'autres dont le nombre dépend du nombre de considérations étrangères admises. Si donc nous associons les propositions X et Y, le nombre total des cas concevables se trouvera d'après le schéma suivant :

	Cas	*Expressions facultatives*
1°	*X vrai, Y vrai*	*x.y*
2°	*X vrai, Y faux*	*x.(1-y)*
3°	*X faux, Y vrai*	*(1-x).y*
4°	*X faux, Y faux*	*(1-x).(1-y)*

[...]

Expression des propositions hypothétiques.

Exprimons qu'une proposition donnée X est vraie.

Le symbole (1-x) choisit le cas où la proposition X est fausse. Mais si la proposition est fausse, il n'y a aucun de ces cas dans l'ensemble hypothétique. Donc

1-x = 0

ou

x = 1.

Exprimons maintenant qu'une proposition donnée X est fausse. Le symbole facultatif x sélectionne les cas où la proposition est vraie. Donc, si la proposition est fausse,

x = 0.

Après avoir déterminé l'expression facultative adéquate à une proposition donnée, dans chaque cas, nous affirmons la vérité d'une proposition en égalant son expression facultative à l'unité ; nous affirmons de même sa fausseté en égalant la même expression à zéro.

Exprimons que deux propositions, X et Y, sont simultanément vraies.

Le symbole facultatif adéquat à ce cas est x.y ; donc l'équation cherchée est

x.y = 1.

[...]

Exprimons enfin que soit la proposition X est vraie, soit la proposition Y est vraie.

Affirmer que l'une ou l'autre des deux propositions est vraie revient à affirmer qu'il n'est pas vrai qu'elles soient fausses toutes les deux en même temps. Mais l'expression facultative adéquate au cas où elles sont fausses en même temps est (1-x).(1-y). L'équation cherchée est donc

(1-x).(1-y) = 0

ou

x + y - x.y = 1.

[BOO-47], ch. V

2.1.3.2 Chez Hugh McColl

Hugh McColl introduit la *négation*, la *conjonction* et la *disjonction* (sous la forme inclusive) par des définitions explicites, montrant par là leur importance. Il introduit également l'*implication*, mais non en tête de son article, montrant ainsi qu'il ne le considre pas comme les autres connecteurs. Nous avons déjà vu qu'il introduit aussi l'*équivalence*, notée comme l'égalité, qui ne s'en distingue donc pas suffisamment, dès sa première définition.

> *DÉF. 2 .- Le symbole AxBxC ou ABC dénotera un énoncé* composé*, dans lequel les énoncés A, B, C peuvent être appelés les* facteurs*. L'équation ABC = 1 dit que* les trois énoncés sont vrais *; l'équation ABC = 0 dit que les trois énoncés ne sont pas tous vrais,* i.e. *que au moins un des trois est faux. On peut définir de même un énoncé composé avec tout nombre voulu de facteurs.*

DÉF. 3 .- Le symbole A + B + C dénotera un énoncé indéterminé*, dans lequel les énoncés A, B, C peuvent être appelés les* termes. *L'équation A + B + C = 0 dit que les trois énoncés sont* faux *; l'équation A + B + C = 1 dit que les trois* ne *sont* pas *tous faux,* i.e. *que au moins* un *des trois est vrai. On peut définir de même un énoncé indéterminé avec tout nombre voulu de termes.*

DÉF. 4 .- Le symbole A' est la négation *de l'énoncé A. Les deux énoncés A et A' satisfont les deux équations A + A' = 1 et AA' = 0, c'est-à-dire qu'un des deux énoncés (soit A, soit A') doit être vrai et l'autre faux. Le même symbole (*i.e. *un accent) convertira tout énoncé complexe en sa négation. Par exemple (AB)' est la négation de l'énoncé composé AB.*

Note.- Les énoncés A et A' sont ce que les logiciens appellent « contradictoires », et les deux équations A + A' = 1 et AA' = 0 combinées expriment le principe connu en logique comme la « loi du tiers exclu ».

[McC-77], p. 9

DÉF. 12 .- Le symbole A :B (qui peut être appelé une implication*) dit que l'énoncé A implique B, ou que quand A est vrai B est aussi vrai.*

Note.- Il est évident que l'implication A :B et l'équation A = AB sont des énoncés équivalents.

[McC-77], p. 177

2.1.3.3 Chez FREGE

FREGE introduit l'*implication* et la *négation* par leurs tables de vérité sous forme implicite (voir un exemple dans l'extrait ci-dessous), en insistant sur le fait qu'il n'y a pas de relation de cause à effet dans le cas de l'implication. Il considère ces connecteurs comme des connecteurs primitifs et exprime les autres connecteurs naturels à partir de ces deux-là, tout en spécifiant à chaque fois également leur table de vérité (incompatibilité, disjonctions inclusive et exclusive, conjonction,...). Il remarque en passant qu'il aurait pu choisir un autre couple de connecteurs primitifs.

Conditionnalité.

§5. Si A et B sont des contenus qui peuvent devenir des jugements (§2), il y a les quatre possibilités suivantes :

(1) A est affirmé et B est affirmé ;

(2) A est affirmé et B est nié ;

(3) A est nié et B est affirmé ;

(4) A est nié et B est nié.

Notons

```
|---- A
  |-- B
```

le jugement que la troisième de ces possibilités n'a pas lieu, mais une des autres a lieu. Par conséquent, si

```
---- A
 |-- B
```

est nié, ceci signifie que la troisième possibilité a lieu, donc que A est nié et que B est affirmé.

Des cas dans lesquels

```
---- A
 |-- B
```

est affirmé, nous exhiberons pour les commenter les trois cas suivants :
(1) A doit être affirmé. Alors le contenu de B est complètement indifférent. Par exemple $|----A$ *est 3 x 7 = 21 et B est la circonstance que le soleil brille. Alors seuls les deux premiers des quatre cas mentionnés sont possibles. Il n'y a pas nécessairement de relation de cause à effet entre les deux contenus.*
(2) B est nié. Alors le contenu de A est indifférent. Par exemple, B est la circonstance que le mouvement perpétuel est possible et A la circonstance que le monde est infini. Alors seuls les second et quatrième cas sont possibles. Il n'y a pas nécessairement de relation de cause à effet entre A et B.
(3) Nous pouvons rendre le jugement

```
|---- A
  |-- B
```

sans savoir si A et B sont affirmés ou niés. Par exemple, soit B la circonstance que la lune est en quadrature avec le soleil et A la circonstance que la lune apparaît comme un demi-cercle. Dans ce cas nous pouvons traduire

```
|---- A
  |-- B
```

au moyen de la conjonction « si » : « Si la lune est en quadrature avec le soleil, alors la lune apparaît comme un demi-cercle ». La relation de cause à effet inhérente au mot « si », cependant, n'est pas exprimée par nos signes, même lorsque seule cette relation justifie un jugement de cette sorte. Car la relation de cause à effet est quelque chose de général, et nous n'avons pas encore exprimé la généralité (voir §12).
[...]
Il est facile de voir que

```
|------- A
  |   |-- B
  |----- C
```

nie le cas où A est nié et B et C sont affirmés.
[...]

Il est moins facile de voir que

```
|------- C
  |   |-- A
  |----- B
```

nie le cas suivant lequel B est affirmé mais A et C sont niés.
Négation.
§7. Si un petit trait vertical est mis sous le trait de contenu, ceci exprimera la circonstance que le contenu n'a pas lieu. Ainsi, par exemple,

```
|--|-- A
```

signifie « A n'a pas lieu ». J'appelle ce petit trait vertical le trait de négation. *La partie du trait horizontal à droite du trait de négation est le trait de contenu de A ; la partie à gauche du trait de négation est le trait de contenu de la négation de A. S'il n'y a pas de trait de jugement, alors aucun jugement n'est fait.*

```
--|-- A
```

nous servira seulement à former l'idée que A n'a pas lieu, sans exprimer si cette idée est vraie.

Nous allons maintenant considérer quelques cas dans lesquels les signes de conditionnalité et de négation sont combinés.

[Incompatibilité (|)]

```
|----|-- A
   |---- B
```

signifie « le cas suivant lequel B est affirmé et la négation de A est niée n'a pas lieu » ; en d'autres mots, « la possibilité d'affirmer à la fois A et B n'existe pas », ou « A et B s'excluent mutuellement ». Ainsi seuls les trois cas suivants demeurent :

A est affirmé et B est nié ;

A est nié et B est affirmé ;

A est nié et B est nié.

[Disjonction (∨)]

```
|------- A
   |---- B
      |
```

signifie « le cas suivant lequel A est nié et la négation de B est affirmée n'est pas obtenu », ou « A et B ne peuvent pas être à la fois niés ». Seules les possibilités suivantes demeurent :

A est affirmé et B est affirmé ;

A est affirmé et B est nié ;

A est nié et B est affirmé.

Or les mots « ou » et « soit ... soit » sont utilisés dans deux sens : « A ou B » signifie, dans un premier sens, la même chose que

```
-------- A
   |---- B
      |
```

c'est-à-dire qu'aucune autre possibilité que A et B n'est pensable. Par exemple, si une masse de gaz est chauffée, son volume ou sa pression s'accroissent.

[Disjonction exclusive (ex)]

Dans un second sens, l'expression « A ou B » combine les significations de

```
-------- A
   | |
   |---- B
```

et

```
-------- A
   |---- B
      |
```

à la fois, c'est-à-dire qu'aucun tiers n'est possible entre A et B, et, de plus, que A et B s'excluent mutuellement. Des quatre possibilités, alors, seules les deux suivantes demeurent :

A est affirmé et B est nié ;

A est nié et B est affirmé.

Des deux façons suivant lesquelles « A ou B » est utilisé, la première, qui n'exclut pas la coexistence de A et de B, est la plus importante, et nous utiliserons le mot « ou » dans ce sens. Il est peut-être approprié de distinguer entre « ou » et « soit ... soit » en stipulant que seule la dernière expression aura la seconde signification, celle d'exclusion mutuelle.

[Conjonction ($\wedge$)]

```
--------- A
  | | |
    |---- B
```

signifie

```
--------- A
    | |
    |---- B
```

est nié,

ou « le cas suivant lequel A et B sont à la fois affirmés arrive ». Les trois possibilités qui restent ouvertes pour

```
--------- A
    | |
    |---- B
```

sont, ici, exclues. Ainsi nous pouvons traduire

```
--------- A
  | | |
    |---- B
```

par « A et B à la fois sont des faits ».

[...]

La distinction entre « et » et « mais » est de la sorte de celles qui ne sont pas exprimées dans la présente idéographie. Le locuteur utilise « mais » lorsqu'il veut insister sur le fait que ce qui suit est différent de ce qu'on pourrait attendre.

[Retour sur la disjonction exclusive]

Si nous voulons représenter en signe « soit A soit B » avec la signification d'exclusion mutuelle, nous devons exprimer :

```
--------- A
    | |
    |---- B
```

et :

```
--------- A
    |
    |---- B
      |
```

Ceci conduit à :

```
--------------------- A
 |   |      |   | |
     |          |---- B
     |--------------- A
           |
           |--------- B
                |
```

ou aussi à :

```
--------------------- A
 |   |      |   |
     |          |---- B
     |             |
     |--------------- A
           |    |
           |--------- B
```

[Ni ... ni]

```
|--------- B
  |  |
     |---- A
        |
```

signifie « le cas suivant lequel A et B sont à la fois niés a lieu ». Ainsi nous pouvons le traduire par « Ni A ni B n'est un fait ».

[Autre symbolisme possible]

Au lieu d'exprimer le « et », comme nous l'avons fait ici, au moyen des signes de conditionnalité et de négation, nous aurions pu aussi représenter la conditionnalité au moyen d'un signe pour « et » et du signe de la négation. Nous aurions pu introduire, disons :

$$\left\{\begin{array}{l}\Gamma \\ \Delta\end{array}\right.$$

comme signe pour le contenu total de Γ *et de* Δ*, et alors rendre :*

```
---------- A
     |---- B
```

par :

$$--|---\left\{\begin{array}{c}----A \\ B\end{array}\right.$$

Je choisis l'autre façon parce que je sens qu'elle nous permet d'exprimer les inférences plus facilement.

[FRE-79], §7

Le *contenu total* de Γ et de Δ signifie évidemment la disjonction « Γ et Δ ».

2.1.3.4 Chez Peano

Peano introduit un symbolisme beaucoup plus maniable que celui de Frege (qu'il ne connaissait pas en 1889), mais, par contre, il est beaucoup moins rigoureux.

> II. Propositions.
>
> *Le signe P signifie* proposition.
>
> *Le signe* $\cap$ *est lu* et. *Soient a et b des propositions ; alors* $a \cap b$ *est l'affirmation simultanée des propositions a et b. Par brièveté, nous écrirons ordinairement ab au lieu de* $a \cap b$.
>
> *Le signe - est lu* non. *Soit a une P ; alors -a est la négation de la proposition a.*
>
> *Le signe* $\cup$ *est lu* ou [vel]. *Soient a et b des propositions ; alors* $a \cup b$ *est la même chose que - :-a.-b.*
>
> *(Le signe V signifie la* vérité*, ou* identité *; mais nous n'utiliserons jamais ce signe).*
>
> *Le signe* $\wedge$ *signifie le* faux*, ou l'*absurde.
>
> *(Le signe* $\subset$ *signifie* est conséquence de *; ainsi* $b \subset a$ *est lu b* est une conséquence de la proposition *a. Mais nous n'utiliserons jamais ce signe).*
>
> *Le signe* $\supset$ *signifie* on déduit *; ainsi* $a \supset b$ *signifie la même chose que* $b \subset a$.
>
> [...]
>
> *Le signe = signifie* est égal à. *Soient a et b des propositions ; alors* $a = b$ *signifie la même chose que* $a \supset b.b \supset a$.
>
> [PEA-89]

2.1.3.5 Chez Russell

Russell donne en 1903 ([RUS-03], p. 14–18), à propos de la logique propositionnelle, plutôt un résumé de la doctrine de Frege qu'un apport original. Il est même beaucoup moins clair et ceci pour trois raisons : il n'utilise pas de symbolisme, or chacun connaît l'intérêt des symboles en Mathématiques ; il ne veut introduire que l'implication et la négation comme termes primitifs (comme Frege d'ailleurs) et définir les autres connecteurs, en particulier la conjonction, la disjonction et l'équivalence, mais il n'utilise pas les tables de vérité pour expliquer de quoi il s'agit, contrairement à Frege ; et surtout il ne fait pas la distinction (ou, tout au moins, pas assez clairement) entre l'implication en tant que connecteur et en tant que déduction.

Il n'est guère beaucoup plus clair dans son article de 1906 ([RUS-06]) mais il introduit cependant le symbolisme suivant : $p \supset q$ pour l'implication (s'inspirant de Peano, comme il le précise), $\sim p$ pour la négation, $p.q$ pour la conjonction (qu'il appelle cependant toujours *produit* de p et de q), $p \vee q$ pour la disjonction (qu'il appelle *somme* de p et de q) et $p \equiv q$ pour l'équivalence. Le progrès par rapport à Peano (mais non par rapport à Frege) est donc de noter différemment les connecteurs et les opérations sur les ensembles, ce qui est quant même fondamental pour bien faire la différence. Il avait d'ailleurs insisté sur cette différence en 1903 :

> *13. Le sujet de la Logique symbolique consiste en trois parties : le calcul des propositions, le calcul des classes et le calcul des relations. Entre les deux premiers il y a, dans une certaine limite, un parallélisme qui se présente comme suit : dans toute expression symbolique les lettres peuvent être interprétées comme classes ou comme propositions, et la relation d'inclusion dans un cas peut être remplacée par celle d'implication dans l'autre. Ainsi, par exemple, dans le principe du syllogisme, si a, b, c sont des classes, a est contenue dans b et b est contenue dans c, alors a est contenue dans c ; et si a, b, c sont des propositions, a implique b et b implique c, alors a implique c. Un grand usage a été fait de cette dualité, et dans les dernières éditions du*

> Formulaire, *Peano semble avoir sacrifié la précision logique à sa préservation. Mais, en fait, il y a beaucoup de cas pour lesquels le calcul des propositions diffère de celui des classes. Considérons, par exemple, le suivant : « Si p, q, r sont des propositions, et p implique q ou r, alors p implique q ou p implique r ». Cette proposition est vraie ; mais sa corrélative, à savoir « Si a, b, c sont des classes, et a est contenue dans b ou c [au sens de l'inclusion], alors a est contenue dans b ou a est contenue dans c », est fausse. Par exemple, les Anglais sont soit des hommes soit des femmes, mais pas tous des hommes ou tous des femmes.* [...] *L'affinité symbolique des logiques propositionnelle et des classes est, de fait, un piège, et nous avons décidé de prendre des deux la plus fondamentale.*
>
> [RUS-03], §13

2.1.4 Notion de logique propositionnelle

La logique propositionnelle en tant que logique des propositions non analysées, par opposition à la logique des prédicats, n'est pas distinguée à l'intérieur de la logique chez les premiers auteurs.

2.1.4.1 Chez Schröder

Le nom lui-même de « calcul des propositions » [*AussagenKalkül*] est de Schröder dans ses *Leçons* ([SCH-90], t. 1, p. 161), inspiré par le titre d'un article de Mc Coll : « Le calcul des énoncés équivalents » ([McC-77]).

2.1.4.2 Chez Russell

Peut-être comme une traduction de celui-ci, Russell utilise « *propositional calculus* » en 1903 ([RUS-03], p. 13 par exemple) dans le sens moderne dans la mesure où il est concerné par les propositions véritables :

> *13.* [...] *Nous pouvons dire qu'une proposition est quelque chose qui est vraie ou qui est fausse. Ainsi une expression telle que « x est un homme » n'est pas une proposition car elle n'est ni vraie ni fausse. Si nous donnons à x une valeur constante quelconque, l'expression devient une proposition : c'est comme si c'était une forme schématique d'une classe de propositions. Et quand nous disons « x est un homme implique que x est mortel pour toutes les valeurs de x », nous énonçons autre chose qu'une simple implication, une classe d'implications ; nous avons* [cependant] *maintenant une proposition véritable dans laquelle, bien que la lettre x apparaisse, il n'y a pas de variable réelle : la variable est absorbée de la même façon que la variable sous le signe intégral dans une intégrale définie, de telle sorte que le résultat n'est pas fonction de x. Peano distingue une variable qui apparaît de cette façon comme étant* apparente [= liée]*, puisque la proposition ne dépend pas de cette variable ; tandis que dans « x est un homme » il y a une proposition différente pour les différentes valeurs de la variable, et la variable est ce que Peano appelle* réelle [= libre]*. Je parlerai de propositions exclusivement quand il n'y a pas de variable réelle : quand il y en a une ou plusieurs, et que pour toutes les valeurs de ces variables l'expression devient une proposition, j'appellerai cette expression une* fonction propositionnelle. *L'étude des propositions véritables est, d'après moi, plus fondamentale que celle des classes ; mais l'étude des fonctions propositionnelles paraît strictement aller de pair avec celle des classes. Peano, comme McColl, regardent les propositions comme plus fondamentales que les classes, mais il entend par là plutôt les fonctions propositionnelles que*

> *les propositions. Schröder est exempt de cette critique : son second volume traite des propositions véritables, et signale leurs différences formelles avec les classes.*
>
> [...]
>
> *15. Notre calcul étudie la relation d'implication entre les propositions. Cette relation doit être distinguée de la relation d'implication formelle, qui tient entre les fonctions propositionnelles quand l'une implique l'autre pour toutes les valeurs des variables. L'implication formelle est présente dans ce calcul, mais n'est pas explicitement étudiée : nous ne considérerons pas les fonctions propositionnelles en général, mais seulement certaines fonctions propositionnelles définies qui apparaissent dans les propositions de notre calcul. Savoir si l'implication formelle est définissable en terme de l'implication simple, ou implication* matérielle *comme elle peut être appelée, est une question difficile, qui sera discutée au chapitre III.*
>
> [RUS-03]

Mais bizarrement, de ce point de vue, il semble régresser en 1906. En particulier « fonction propositionnelle » désigne alors deux choses à la fois : les fonctions propositionnelles au sens ci-dessus (les *formules logiques* au sens actuel) mais aussi les combinaisons de propositions (les *expressions logiques* au sens actuel). Par contre la « théorie de la déduction » de 1914 ([WR-10], Part I, Section A) peut être considérée comme l'analogue du calcul propositionnel (considéré comme inclus dans le calcul des prédicats).

2.1.4.3 Chez Lewis

Clarence Lewis est plus clair dans son *Survey of symbolic logic* de 1918. Ce livre est en fait consacré à l'algèbre de Boole (à savoir la structure mathématique de ce nom) : le chapitre premier est un historique, le chapitre deux un exposé, le chapitre trois concerne les applications à la théorie des ensembles, au calcul propositionnel et à la théorie des relations, le chapitre quatre est celui qui nous intéresse plus particulièrement. Le développement de l'algèbre de Boole dans les chapitres précédents a été fait avec une logique implicite, les applications aux théories citées portent sur des calculs complexes et non sur les fondements de ces théories. Lewis veut maintenant passer à ce problème du fondement :

> *Nous sommes concernés, dans ce chapitre, par le « calcul des propositions » ou « calcul de l'implication matérielle », et par son extension aux fonctions propositionnelles. Nous découvrirons ici deux modes distincts de procéder, et c'est une part de notre propos que d'exposer ces deux méthodes côte à côte.*
>
> *Le premier procédé prend l'algèbre de Boole de Schröder comme fondement, interprète les éléments de ce système comme des propositions, et lui ajoute un postulat valable pour les propositions mais non pour les classes logiques. Le résultat est ce qui est appelé « l'algèbre à deux valeurs », car le postulat additionnel consiste en la loi : pour tout x, si* $x \neq 1$ *alors x = 0, et si* $x \neq 0$ *alors x = 1. Cette algèbre à deux valeurs est une forme du calcul des propositions. L'extension de l'algèbre à deux valeurs aux propositions de la forme* ϕx_n [1]*, où* x_n *est un élément individuel d'une classe composée de* x_1, x_2, x_3*, etc., donne le calcul des fonctions propositionnelles. Les fonctions* Π *et* Σ *ont une signification spéciale dans ce système* [celle de quantification]*, et la relation d'« implication formelle »,* $\Pi_x\ (\phi x \subset \psi x)$*, est particulièrement importante.* [...] *Ceci est le type du procédé utilisé par Peirce et Schröder.*
>
> *La seconde méthode – celle des* Principia Mathematica *– commence par le calcul des propositions, ou calcul de l'implication matérielle, en une forme qui est plus simple*

1. ϕ est une fonction [N.D.T.].

> *et autrement supérieure à celle de l'algèbre à deux valeurs, passe alors au calcul des fonctions propositionnelles et de l'implication formelle, et fait reposer sur ce dernier non seulement le traitement des relations mais aussi le « calcul des classes ».*
>
> *Il est extrêmement important pour la compréhension du sujet de la logique symbolique tout entier que l'*agrément en résultats *et la* différence de méthode *de ces deux procédés soient bien compris. Trop souvent ils apparaissent à l'étudiant tout simplement comme non apparentés.*
>
> [LEW-18], p. 222

On voit bien en quoi cette algèbre à deux valeurs (attribuée par LEWIS à [SCH-90], vol. II, spécialement *Fünfzehnte Vorlesung*) correspond exactement à notre calcul propositionnel. Il expose celui-ci en détail dans la première section de ce chapitre quatre (la section deux est consacrée à l'étude des fonctions propositionnelles à une variable, la section trois à celles à deux ou plusieurs variables, la quatrième à l'application au calcul des classes, la cinquième à la logique des relations, suivant en cela le plan des *Principia*). Mais le fondement n'est pas encore adéquat car la logique reste toujours implicite. Un remède est apporté dans la sixième section :

> *Nous avons montré comment il est possible, en commençant par l'algèbre à deux valeurs comme un calcul des propositions, de dériver la logique des classes en une forme un peu plus satisfaisante que l'algèbre de Boole–Schröder, ainsi que la logique des relations.* [...]
>
> *La logique des* Principia Mathematica *théoriquement plus profonde et plus adéquate, est donnée sous une forme – en ce qui concerne les fonctions propositionnelles et leurs dérivées – qui me semble obscurcir, par ses notations, les analogies mathématiques naturelles et utiles, et requiert un style de pensée qui est beaucoup moins naturel* [que dans l'exposition précédente]. *En ce qui concerne ce second propos, nous renions l'idée que le développement que nous avons donné est théoriquement adéquat.* [...]
>
> *L'algèbre à deux valeurs est un calcul produit en étendant et en réinterprétant une algèbre primitivement consacrée aux relations comme classes. Elle a plusieurs défauts qui reflètent son origine. En premier lieu, la même relation logique est exprimée, dans ce système, de deux façons différentes. Nous avons, par exemple, la proposition « Si $p \subset q$ et $q \subset r$, alors $p \subset r$ », où p, q et r sont des propositions. Mais « Si ..., alors ... » est supposée être la même relation que celle exprimée par $\subset$ dans $p \subset q$, $q \subset r$ et $p \subset r$.* [...] *Ainsi* le système considère les lois des relations logiques entre propositions comme admises afin de les prouver [...].
>
> *Un autre défaut de l'algèbre à deux valeurs est la redondance des formes. La proposition p ou bien « p est vraie » est symbolisée par p, par $p = 1$, par $p \neq 0$, etc., la négation de p ou « p est fausse » par $-p$, $p = 0$, $-p = 1$, $p \neq 1$, etc.* [...].
>
> *Ces deux défauts sont résolus par la procédure adoptée pour le calcul des propositions dans les* Principia Mathematica. *Ici $p = 1$, $p = 0$, etc. ne sont pas utilisés ; à la place nous avons seulement p et sa négation, symbolisée par $\sim p$. Et, aussi impossible que cela puisse paraître, la logique des propositions, que tout système mathématique a toujours considéré comme donné, n'est pas supposé.*
>
> [LEW-18], p. 279–282

On remarquera au passage que LEWIS confond encore en 1918 l'assertion et l'affirmation d'une proposition, la négation n'étant pas considérée comme un connecteur.

2.1.4.4 Chez Hilbert et Ackermann

Je pense que c'est surtout depuis le manuel de Hilbert et Ackermann [H-A-28] que la distinction est bien faite entre logique propositionnelle et logique des prédicats.

Chapitre I

Le calcul des énoncés

> *Une première partie indispensable de la logique mathématique consiste en ce qui est appelé le calcul des énoncés. On entend par énoncé toute expression pour laquelle cela a un sens de dire que son contenu est vrai ou faux. Des exemples d'énoncés sont : « Les Mathématiques sont une science », « La neige est noire », « 9 est un nombre premier ». Dans le calcul des énoncés nous ne sommes pas concernés par la structure interne des énoncés, telle qu'elle est exhibée, disons, dans la relation entre le sujet et le prédicat, mais nous considérons les énoncés comme des tout dans leur combinaison logique avec d'autres énoncés.*
>
> [H-A-28], p. 3

2.1.5 Le nom

Nous venons de voir les noms successifs donnés au calcul propositionnel.

2.2 La logique propositionnelle comme système déductif

2.2.1 Idée d'un système déductif pour le calcul propositionnel

Si on peut dire que Boole dégage l'idée de calcul propositionnel, d'une certaine façon, par contre il se sert d'une logique sous-jacente pour déduire les théorèmes logiques à partir des lois fondamentales. Le premier à comprendre qu'on ne peut pas à la fois vouloir dériver les « lois de la pensée » à partir d'un nombre fini de lois et à la fois utiliser celles-ci pour le faire est Frege.

En 1879 il prend conscience de la distinction entre ce que nous appelons maintenant *langage* et *métalangage* : les lois de la logique peuvent être décrites dans un certain langage (« en signes » dit-il) mais les règles de transformation doivent être exprimées en langage courant :

> §*13. Nous avons déjà introduit un nombre de principes fondamentaux de la pensée dans le premier chapitre afin de les transformer en règles pour l'usage de nos signes. Ces règles et les lois qu'elles transforment ne peuvent pas être exprimées dans l'idéographie puisqu'elles en forment la base. Mais, maintenant, dans ce chapitre, un certain nombre de jugements de la pensée pure pour lesquels ceci sera possible seront représentés en signes.*
>
> [FRE-79]

Il justifie également la méthode axiomatique formalisée :

> *Il semble naturel de dériver les plus complexes de ces jugements à partir des plus simples, non pas afin de les rendre plus certains, ce qui ne serait pas nécessaire dans la plupart des cas, mais afin de rendre manifeste les relations entre les jugements. Connaître simplement les lois n'est évidemment pas la même chose que de les connaître dans leur ensemble avec les connections qu'elles ont les unes avec les autres. De cette façon nous en arrivons à un petit nombre de lois à partir desquelles,*

> *si nous ajoutons celles contenues dans les règles, le contenu de toute loi est inclus, bien que dans un état non développé. Et que le mode de présentation déductif nous en donne connaissance avec ce noyau est un autre de ses avantages. Puisque, vue la multitude non bornée de lois qui peuvent être énoncées, nous ne pouvons pas en donner la liste complète, nous ne pouvons pas l'achever complètement sauf en cherchant celles qui, en puissance, contiennent toutes les autres. Mais on doit admettre que la façon suivie ici n'est certainement pas la seule réduction qui puisse être faite. C'est pourquoi toutes les relations entre les lois de la pensée ne sont pas toutes élucidées au moyen du présent mode de présentation.*
>
> [FRE-79]

Frege est un peu plus explicite sur la formalisation de la logique dans un article de 1897 :

> *Des mots tels que « ainsi », « par conséquent », « puisque » suggèrent qu'une inférence a été effectuée, mais ils ne disent rien sur le principe d'après lequel elle l'a été* [...]. *Dans l'enquête que j'ai en vue ici, la question est non seulement qu'on soit convaincu de la vérité de la conclusion, ce qui suffit en général à nous satisfaire en mathématiques ; mais on doit aussi prendre conscience de la raison de cette conviction et donner les lois primitives sur lesquelles elle repose* [...]. *L'inférence est considérée dans mon système symbolique* [Begriffsschrift] *comme une sorte de calcul. Non pas dans un sens restreint* [...] *semblable à l'addition ou la multiplication ordinaires, mais dans le sens que ceci est algorithmique, avec une série de règles qui réglementent le passage d'une proposition ou de deux à une autre.*
>
> [FRE-97], pp. 362 et 364

2.2.2 Variable propositionnelle et expression logique

Le calcul propositionnel est à lui seul une partie intéressante de la logique. Son objet est l'étude de la combinaison des propositions grâce aux connecteurs logiques, sans entrer dans l'analyse des propositions. Comme nous l'avons vu précédemment, cette discipline a du mal à trouver son indépendance. Un rôle important est joué dans celle-ci par les variables propositionnelles (en général nommées p, q, r,...) et les expressions propositionnelles (telles que $(p \rightarrow q) \wedge r$).

Comment définir celles-ci ?

La notion vague d'*expression logique* est bien sûr connue dès les premiers travaux de Boole, mais la définition rigoureuse de l'*ensemble des expressions logiques* et surtout la *loi d'induction* associée, qui permet d'établir des métathéorèmes, sont abordées en premier par Hilbert.

2.2.3 Notion d'inférence

2.2.3.1 Chez Frege

Il faut faire une distinction entre l'*implication* en tant que connecteur logique, notée de nos jours $\rightarrow$, et l'inférence, notée de nos jours $\vdash$, qui se lit bien souvent de la même façon dans le langage courant, à savoir *implique*. Par exemple :

$$A, A \rightarrow B \vdash B,$$

est une inférence qui signifie que si les deux propositions A et $A \rightarrow B$ sont vraies alors il en est de même de la proposition B. Cette inférence est appelée *modus ponens* d'après une règle de la logique classique, et sa justification est immédiate.

C'est certainement Frege qui fait bien la différence le premier, en 1879, et surtout introduit une notation, ce qui marque toujours une prise de conscience. Il note en effet :

$$\frac{\begin{array}{l} A \\ A \to B \end{array}}{B}$$

l'inférence ci-dessus puis propose une écriture plus compacte.

§6. La définition donnée au §5 fait naturellement que des deux jugements :

```
|---- A
  |-- B
```

et :

```
|---- B
```

suit le nouveau jugement :

```
|---- A
```

car des quatre cas énumérés ci-dessus, le troisième est exclu par :

```
|---- A
  |-- B
```

et le second et le quatrième par :

```
|---- B
```

ainsi seul le premier reste.

Nous pourrions peut-être écrire cette inférence comme suit :

```
|---- A
  |-- B

|---- B
________
|---- A
```

Mais ceci deviendrait encombrant si de longues expressions étaient à la place de A et de B, puisque chacune devrait être écrite deux fois. Voilà pourquoi j'utilise l'abréviation suivante. À chaque jugement apparaissant dans une preuve j'assigne un numéro, que j'écris à droite de ce jugement lors de sa première occurrence. Maintenant supposons, par exemple, que le jugement :

```
|---- A
  |-- B
```

ou un de ses cas particuliers, ait reçu le numéro X. Alors j'écris l'inférence comme suit :

```
     |---- A
       |-- B

(X): |---- B
```

```
     |---- A
```

On laissa ici au lecteur le soin de poser le jugement :

```
|---- A
  |-- B
```

entre $|---$ *B et* $|---$ *A et de voir ce qu'est le jugement X ci-dessus.*

[FRE-79], §6

L'intérêt de cette notion d'inférence (dans ce sens technique spécialisé) permet à Frege de présenter la logique sous une forme « algorithmique », qu'il commentera plus dans le texte de 1897 déjà nommé, puisqu'à partir d'un certain nombre d'axiomes (en fait de schémas d'axiomes, mais Frege ne prend pas conscience de cette notion), on peut en déduire tous les théorèmes logiques de la façon bien connue maintenant.

2.2.3.2 Chez Russell

Le texte de Frege passe inaperçu. Russell parle de l'inférence, également à propos du seul *modus ponens*, en 1910 dans ces termes :

> *Inférence.- Le procédé d'inférence est le suivant : une proposition « p » est assertée, et une proposition « p implique q » est assertée, alors la proposition « q » est assertée. La vérité de l'inférence est la croyance que si les deux premières assertions ne sont pas dans l'erreur, l'assertion finale n'est pas dans l'erreur. Ainsi, en symboles, si p et q ont, bien sûr, des déterminations spéciales,*
>
> $$« \vdash p » \text{ et } « \vdash (p \supset q) »$$
>
> *apparaissant, alors « $\vdash q$ » apparaîtra si désiré. Le procédé d'inférence ne peut pas être réduit en symbole. Sa seule marque est l'apparition de « $\vdash q$ ». Il est bien sûr commode, même au risque de répétition, d'écrire « $\vdash p$ » et « $\vdash (p \supset q)$ » en juxtaposition avant de procéder à « $\vdash q$ » comme résultat de l'inférence. Quand ceci devra être fait, de façon à porter toute notre attention sur l'inférence, nous écrirons à la place :*
>
> $$« \vdash p \supset \vdash q »,$$
>
> *qui doit être considéré comme une simple abréviation du triple énoncé :*
>
> $$« \vdash p » \text{ et } « \vdash (p \supset q) » \text{ et } « \vdash q ».$$
>
> [WR-10], Introduction, chapitre I

2.2.4 Les premiers systèmes déductifs

2.2.4.1 Chez Frege

Nous avons vu que Frege a une idée nette de ce qu'est un système formalisé de la Logique, dégageant bien les notions d'axiome et de règle d'inférence. Il ne donne pas réellement d'axiomatique de la logique propositionnelle seule, mais on peut facilement en extraire une de son axiomatique pour la logique en général.

> *Les propositions formant le noyau de la présentation ci-dessus sont au nombre de* [six]*. Pour exprimer trois de celles-ci, les formules (1), (2) et (8), nous avons seulement besoin, outre les lettres, du signe de conditionnalité ; les formules (28), (31) et (41) contiendront en plus le signe de négation.*
>
> [FRE-79], §13

On remarque que les axiomes ne sont pas mis au début, puisque chaque numéro correspond à une loi déjà énoncée. Ces axiomes sont, avec les notations modernes, les suivants :

$$(1)\ a \to (b \to a).$$

> [Cette formule] *dit « le cas selon lequel a est nié, b est affirmé, et a est affirmé est exclu ». Ceci est évident, puisque a ne peut pas être à la fois nié et affirmé. Nous pouvons aussi exprimer ce jugement en mots ainsi « si une proposition a tient, alors elle tient aussi dans le cas où une proposition arbitraire b tient ».*
>
> [FRE-79]

$$(2)\ (c \to (b \to a)) \to ((c \to b) \to (c \to a)).$$

$$(8)\ (d \to (b \to a)) \to (b \to (d \to a)).$$

> *Ceci peut aussi s'exprimer ainsi : « si deux conditions ont une même proposition comme conséquence, leur ordre est indifférent ».*
>
> [FRE-79]

$$(28)\ (b \to a) \to (\neg a \to \neg b).$$

$$(31)\ \neg\neg a \to a.$$

$$(41)\ a \to \neg\neg a.$$

Toutes les justifications de ces axiomes se font par l'analogue de notre usage des tables de vérité.

Ainsi le système propositionnel de Frege repose sur une règle d'inférence (la règle du détachement, ou *modus ponens*) et six axiomes. Il utilise en fait aussi implicitement la règle de substitution, mais il n'en prend pas conscience.

2.2.4.2 Chez Peano

Le rôle de Peano est surtout d'introduire un symbolisme beaucoup plus maniable que celui de Frege. Cependant sa participation est plus importante que cela, puisqu'il ne connaissait pas Frege (tout au moins en 1889) et doit donc redécouvrir une grande partie de ce que ce dernier a fait (bien qu'allant nettement moins loin) et que c'est lui qui a réellement fait connaître la logique. Cependant Peano n'arrive pas à un système déductif : les formules sont seulement listées et non dérivées ; et elles ne peuvent pas être déduites, puisqu'aucune règle d'inférence n'est donnée. L'absence de la règle de détachement est apparemment liée à l'interprétation inadéquate du conditionnel. Il lit « a $\supset$ b » comme « de a on déduit b », ce qui reste vague. Les valeurs de vérité ne sont pas utilisées du tout dans le livre de 1889, et seulement marginalement dans les publications ultérieures. La critique en sera d'ailleurs faite par Frege [FRE-96, FRE-97].

> II. Propositions.
>
> *Le signe P signifie* proposition.
>
> *Le signe $\cap$ est lu* et. *Soient a et b des propositions ; alors $a \cap b$ est l'affirmation simultanée des propositions a et b. Par brièveté, nous écrirons ordinairement ab au lieu de $a \cap b$.*
>
> *Le signe - est lu* non. *Soit a une P ; alors -a est la négation de la proposition a.*
>
> *Le signe $\cup$ est lu* ou [vel]. *Soient a et b des propositions ; alors $a \cup b$ est la même chose que - :-a.-b.*
>
> *(Le signe V signifie la* vérité*, ou* identité *; mais nous n'utiliserons jamais ce signe).*
>
> *Le signe $\wedge$ signifie le* faux*, ou l'*absurde.
>
> *(Le signe $\subset$ signifie* est une conséquence de *; ainsi $b \subset a$ est lu b* est une conséquence de la proposition *a. Mais nous n'utiliserons jamais ce signe).*
>
> *Le signe $\supset$ signifie* on déduit *; ainsi $a \supset b$ signifie la même chose que $b \subset a$.*
>
> [...]
>
> *Le signe = signifie* est égal à. *Soient a et b des propositions ; alors a = b signifie la même chose que $a \supset b.b \supset a$.*
>
> [...]
>
> III. Propositions de logique.
>
> *Soient a, b, c, ... des propositions. Nous avons alors :*
>
> *1. $a \supset a$.*
>
> *2. $a \supset b.b \supset a : \supset .a \supset c$.*
>
> *3. $a = b .= : a \supset b.b \supset a$.*
>
> *4. $a = a$.*
>
> *5 $a = b .=. b = a$.*
>
> *6. $a = b . b \supset c : \supset . a \supset c$.*
>
> *7. $a \supset b . b = c : \supset . a \supset c$.*
>
> *8. $a = b . b = c : \supset . a = c$.*
>
> *9. $a = b . \supset . a \supset b$.*
>
> *10. $a = b . \supset . b \supset a$.*
>
> ---
>
> *11. $ab \supset a$.*
>
> *12. $ab = ba$.*
>
> *13. $a(bc) = (ab)c = abc$.*
>
> *14. $aa = a$.*

15. $a = b . \supset . ac = bc.$
16. $a \supset . \supset . ac = bc.$
17. $a \supset b . c \supset d : \supset . ac \supset bd.$
18. $a \supset b . a \supset c : = . a \supset bc.$
19. $a = b . c = d : \supset . ac = bd.$

---

20. $-(-a) = a.$
21. $a = b . = . -a = -b.$
22. $a \supset b . = . -b \supset -a.$

---

23. $a \cup b .= : : - :-a.-b.$
24. $-(ab) = (-a) \cup (-b).$
25. $-(a \cup b) = (-a)(-b).$
26. $a \supset . a \cup b.$
27. $a \cup b = b \cup a.$
28. $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c = a \cup b \cup c.$
29. $a \cup a = a.$
30. $a(b \cup c) = ab \cup ac.$
31. $a = b . \supset . a \cup c = b \cup c.$
32. $a \supset b . \supset . a \cup c \supset b \cup c.$
33. $a \supset b . c \supset d : \supset : a \cup c . \supset . b \cup d.$
34. $b \supset a . c \supset a :=. b \cup c \supset a.$

---

35. $a-a = \wedge.$
36. $a\wedge = \wedge.$
37. $a \cup \wedge = a.$
38. $a \supset \wedge .=. a = \wedge.$
39. $a \supset b .=. a-b = \wedge.$
40. $\wedge \supset a.$
41. $a \cup b = \wedge .= : a = \wedge . b = \wedge.$

---

42. $a \supset . b \supset c := : ab \supset c.$
43. $a \supset . b = c :=. ab = ac.$

Soit α un signe de relation (par exemple $=$, $\supset$), tel que $a \alpha b$ soit une proposition. Alors, au lieu de $-.a \alpha b$, on écrira $a - \alpha b$; c'est-à-dire,
$a -= b .= : -. a = b.$
$a -\supset b .= : -.a \supset b.$
Ainsi le signe $-=$ signifie n'est pas égal à. [...] *Le signe $-\supset$ signifie* on ne déduit pas.

[PEA-89]

2.2.4.3 Chez Russell

Les *Principia Mathematica* (1910) utilisent, outre les variables, le signe d'assertion de Frege « $\vdash$ » (avec une longueur réduite), les points de Peano et les crochets, deux symboles primitifs non définis (sauf intuitivement, bien sûr) : « $\sim$ » et « $\vee$ ». Les autres connecteurs usuels sont définis, par exemple pour l'implication :

1.01. $p \supset q \,.{=}.\!\sim\! p \vee q$ *Df.*

[WR-10]

Les lettres « Pp » signifient proposition primitive, comme chez PEANO. Voici la règle d'inférence et les cinq axiomes de RUSSELL :

Propositions primitives

**1.1. Tout ce qui est impliqué par une proposition élémentaire vraie est vraie. Pp.*

Le principe ci-dessus [...] *n'est pas la même chose que « si p est vraie alors si p implique q, q est vraie ». Ceci est une propriété vraie, mais elle tient également lorsque p n'est pas vraie ou quand p n'implique pas q. Elle n'est pas capable, au contraire du principe dont nous discutons, de donner simplement q comme une assertion, sans autre hypothèse. Nous ne pouvons pas exprimer ce principe symboliquement, parce que tout symbolisme dans lequel p est seulement une variable donne les hypothèses pour que p soit vraie, mais non le* fait *que p soit vraie.*

[...]

**1.2.2.* $\vdash :p \vee p. \supset p$ *Pp.*

Cette proposition énonce : « Si soit p est vraie, soit p est vraie, alors p est vraie ». Il est appelé « principe de tautologie », et sera noté par le titre abrégé « Taut. ». Il est commode, pour les références, de donner des noms à quelques-unes des plus importantes propositions ; en général, les propositions seront référencées par leur numéro.

**1.3.* $\vdash :q. \supset .p \vee q$ *Pp.*

Ce principe s'énonce : « Si q est vraie, alors 'p ou q' est vraie ». Ainsi, par exemple, si q est « aujourd'hui on est mercredi » et p est « aujourd'hui on est mardi », le principe s'énonce : « si aujourd'hui on est mercredi alors aujourd'hui on est soit mercredi soit mardi ». Ceci est appelé le « principe d'addition », puisqu'il énonce que si une proposition est vraie, toute alternative peut être ajoutée sans la rendre fausse. Ce principe sera référé par « Add. ».

**1.4.* $\vdash :p \vee q. \supset .q \vee p$ *Pp.*

Ce principe énonce que « p ou q » implique « q ou p ». Il énonce la loi de permutation de l'addition logique des propositions, et sera appelé le « principe de permutation ». Il sera référé par « Perm. ».

**1.5.* $\vdash :p \vee (q \vee r). \supset .q \vee (p \vee r)$ *Pp.*

Ce principe énonce : « Si soit p est vraie, soit 'q ou r' est vraie, alors soit q est vraie, soit 'p ou r' est vraie ». C'est une forme de la loi associative de l'addition logique, et elle sera appelée le « principe associatif ». Il sera référé par « Assoc. ». La proposition :

$$p \vee (q \vee r). \supset .(p \vee q) \vee r,$$

qui serait la forme naturelle pour la loi associative, a moins de puissance déductive, et donc ne sera pas prise comme proposition primitive.

**1.6.* $\vdash :.q \supset r. \supset :p \vee q. \supset .p \vee r$ *Pp.*

Ce principe s'énonce : « Si q implique r, alors 'p ou q' implique 'p ou r' ». En d'autres mots, dans une implication, une alternative peut être ajoutée à la fois à la prémisse et à la conclusion sans affecter la vérité de l'implication. Ce principe sera appelé le « principe de sommation », et sera référé par « Sum ».

[...]

Ceci est la liste complète des propositions primitives requises pour la théorie de la déduction appliquée aux propositions élémentaires.

[WR-10], Part I, sect. A, 1

Remarquons que *1.1 peut s'écrire symboliquement de nos jours sous la forme :

$$\mathrm{p},\ \mathrm{p} \supset \mathrm{q} \vdash \mathrm{q}.$$

Les paragraphes 2 à 5 de la section A sont consacrés à l'énoncé et la démonstration des principaux théorèmes de logique propositionnelle. Quelques exemples suffisent à expliquer la méthode de démonstration utilisée dans les *Principia* :

**2.01. $\vdash$:p $\supset$ ∼p.$\supset$.∼p.*

Cette proposition énonce que, si p implique sa propre fausseté, alors p est fausse. Ceci est appelé le « principe de reductio ad absurdum *», et sera référé par « Abs. ». La preuve est la suivante (où «* Démon. *» est une abréviation pour « démonstration ») :*

$$\textit{Démon.}\ \left[Taut\ \frac{\sim p}{p}\right] \vdash :\sim p \vee \sim p. \supset . \sim p\ (1)$$

$$[(1).(^{*}1.01)] \vdash : p \supset \sim p. \supset . \sim p$$

[...]

**2.3. $\vdash$: p $\vee$ (q $\vee$ r).$\supset$.p $\vee$ (r $\vee$ q)*

$$\textit{Démon.}\ \left[Perm\ \frac{q, r}{p, q}\right]\ \vdash : q \vee r. \supset .r \vee q :$$

$$\left[Sum\ \frac{q \vee r,\ p \vee q}{q, r}\right] \vdash : p \vee (q \vee r). \supset .p \vee (r \vee q).$$

[WR-10]

2.2.4.4 Chez Hilbert et Ackermann

L'*axiomatique* dite *de Hilbert-Ackermann*, qui comprend la seule règle de *modus ponens* et les quatre schémas d'axiomes suivants :

- $(A \vee A) \rightarrow A$,
- $A \rightarrow (A \vee B)$,
- $(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$,
- $(A \vee B) \rightarrow ((C \vee A) \rightarrow (C \vee B))$,

est l'axiomatique la plus utilisée aujourd'hui.

C'est en fait une amélioration de celle de Russell et Whitehead. En effet ces derniers n'ont pas pris conscience, d'une part, du fait qu'ils utilisent des schémas d'axiomes et non des axiomes, et, d'autre part, ils utilisent le schéma suivant :

- $(A \vee (B \vee C)) \rightarrow (B \vee (A \vee C))$,

montré non nécessaire par Bernays dans sa thèse en 1926 ([BER-26]). Ce système est employé par Hilbert et Ackermann dans leur célèbre ouvrage de 1928 ([H-A-28], I §10).

2.2.4.5 Les autres axiomatiques

Nous ne ferons pas ici l'historique des autres axiomatiques de la logique propositionnelle et ceci pour deux raisons.

Cet historique me semble moins important car les idées générales sont dégagées à propos d'une axiomatique, qu'importe laquelle, les autres axiomatiques apparaissant comme des variantes à étudier éventuellement en exercices, sauf si des idées importantes se dégagent à leur propos.

De toute façon cet historique est effectué avec une grande érudition par Alonzo CHURCH dans son célèbre ouvrage de 1956 ([CHU-56], pp. 155 à 167).

2.2.5 Notion de schéma d'axiomes

La notion de *schéma d'axiomes* n'est introduite, avec tout le soin requis pour l'explication de son sens, qu'en 1927 par VON NEUMANN ([NEU-27]).

Une autre façon de faire est d'utiliser la *règle de substitution* que l'on peut ajouter comme deuxième règle d'inférence (à côté de celle de *modus ponens*). Elle est implicite chez les premiers auteurs, mais apparaît explicitement dans le livre de FREGE de 1893 ([FRE-93]).

Le premier énoncé explicite de cette règle pour la logique propositionnelle seule est dû à Louis COUTURAT en 1905 :

> *Ce n'est pas tout : à ce principe* [modus ponens] *il faut adjoindre le* principe de substitution*, qui s'énonce : « Dans une formule générale, à un terme général ou indéterminé on peut substituer un terme particulier ou individuel ». Cela est évident, puisqu'une formule générale n'a de valeur et même de sens qu'en tant qu'elle peut s'appliquer à des termes particuliers. Ce principe, comme le précédent, ne peut pas se traduire en symboles, justement parce qu'il fonde l'emploi des symboles ; et, en effet, on ne pourrait l'exprimer, y compris la notion de « terme particulier », qu'au moyen de symboles généraux ; mais, pour l'appliquer à des termes réellement particuliers, il faudrait pouvoir substituer ceux-ci aux termes généraux qui les représenteraient dans la formule, ce qui ne se peut qu'en vertu du principe lui-même.*
>
> [COU-05], ch. I, §A, p. 12

Cependant, son énoncé est peut-être insuffisant car il n'est pas clair que les expressions substituées à la variable peuvent elles-mêmes contenir des variables.

RUSSELL énonce cette règle de façon plus satisfaisante dans un article de 1906 :

> ** 1.3.* La variable.- *Une simple lettre, à moins qu'elle ne soit spécialement définie comme ayant une certaine signification constante, tiendra toujours pour une variable indépendante.* [...]
>
> *Dans une formule telle que, disons, « x .=. $p \supset q$ », le x est encore une variable indépendante, puisque nous ne sommes pas seulement concernés par la valeur du x qui rend la formule vraie, mais aussi par toutes les autres valeurs qui la rendent fausse. Par contre « $p \supset q$ » est une variable dépendante.*
>
> ** 1.4.* Fonctions propositionnelles.- *Tout énoncé sur une variable x sera exprimé par :*
>
> $$(C)(x)$$
>
> *ou par $(A)(x)$, $(B)(x)$, etc. De même tout énoncé sur deux variables x et y sera représenté par :*
>
> $$(C)(x,y)$$
>
> *ou par $(A)(x,y)$, $(B)(x,y)$ etc., et ainsi de suite pour tout nombre de variables. De telles expressions sont des fonctions dont les valeurs sont des propositions ; nous les*

appellerons donc des fonctions propositionnelles. *Ainsi « $p \supset q$ » est une fonction propositionnelle de p et de q ; « $p \supset p$ » est une fonction propositionnelle de p. Il y a d'autre sortes de fonctions en mathématiques, mais elles ne sont pas requises pour la théorie de l'implication.*

Quand une expression de la forme $(C)(x)$ est énoncée, ceci signifie que l'expression en question est vraie pour toute valeur de la variable x. Ainsi, par exemple :

$$« \ \vdash .p \supset p »$$

signifie : « pour toute valeur de p, p implique p ». Mais une expression telle que $(C)(p \supset q)$ n'énonce pas que $(C)(x)$ tient pour tout argument, mais seulement pour ceux de la forme $p \supset q$.

[...]

** 2.2. Si une fonction propositionnelle $(C)(y)$ est vraie pour toute valeur de y, elle est vraie pour une telle valeur. Pp.*

Ce principe sera appelé le "principe de substitution", et sera référé comme "Subst." [...]

** 2.3. Si une fonction propositionnelle $(C)(y)$ est vraie pour toute valeur de y, alors $(C)((A)(z))$ est vrai pour toute valeur de z. Pp.*

Ceci peut être appelé le « principe de la substitution d'une variable indépendante par une variable dépendante ». [...]

L'utilisation de ce principe est constant. Il est, par exemple, nécessaire pour l'inférence qui dit que, puisque « $p \supset p$ » est vrai pour toute valeur de p, c'est vrai si nous substituons $p \supset q$ à p, et ainsi « $p \supset q. \supset .p \supset q$ » est vrai pour toutes les valeurs de p et de q.

[RUS-06], p. 162–166

Russell omet cette règle en 1908 ([RUS-08]), puis dit dans les *Principia Mathematica* qu'elle ne peut pas être énoncée :

La reconnaissance qu'une certaine proposition est un exemple de quelque proposition générale précédemment trouvée [...] *ne peut pas elle-même être érigée en une règle générale.*

[WR-10]

Lewis énonce la règle de substitution explicitement, d'abord pour son système d'implication stricte en 1913 ([LEW-13]), puis pour le système même de Russell dans son livre de 1918 :

**1.7 Si p est une proposition élémentaire alors $\sim p$ est une proposition élémentaire. Pp.*

**1.71 Si p et q sont des propositions élémentaires alors $p \vee q$ est une proposition élémentaire. Pp.*

**1.72 Si ϕp et φp sont des fonctions propositionnelles élémentaires qui prennent des propositions comme arguments alors $\phi p \vee \varphi p$ est une fonction propositionnelle élémentaire. Pp.*

*Ceci complète la liste des suppositions. Les trois dernières ont à voir directement avec la méthode par laquelle le système est développé. D'après *1.7, toute proposition qui est supposée ou prouvée pour p peut aussi être énoncée pour $\sim p$, c'est-à-dire que $\sim p$ peut être substitué à p ou à q ou à r, etc., dans toute proposition du système. D'après*

**1.71, p ∨ q peut être substitué à p ou à q ou à r, etc. Et d'après *1.72, si deux complexes des symboles ci-dessus qui ont un sens comme « énoncés » peuvent être traités d'une certaine façon dans le système, alors leur disjonction peut être traitée de la même façon. En utilisant ces trois suppositions, toute combinaison telles que p ∨ q, p.q, p ⊃ q, p ≡ q, p ⊃ q.p ⊃ q, [...] peuvent être substitués à p ou à q ou à r dans toute proposition supposée ou dans tout théorème. Une telle substitution, pour laquelle aucun postulat ne pourrait ordinairement être énoncé, est une des opérations fondamentales par laquelle le système est développé.*

[LEW-18], p. 284

Russell reconnaît l'omission de la règle de substitution dans son *Introduction à la philosophie mathématique* de 1919 :

La déduction ci-dessus est un exemple d'utilisation d'une première méthode, qui mérite à peine le nom de déduction, pour obtenir à partir d'une prémisse de nouveaux résultats. Les propositions primitives, quelles qu'elles soient, sont à comprendre comme assertées pour toutes les valeurs possibles des propositions variables p, q, r, qui y figurent. Nous pouvons donc substituer à p (par exemple), n'importe quelle expression dont la valeur est toujours une proposition : non-p, « s implique t », et ainsi de suite. Ce que nous obtenons par ce genre de substitutions, en réalité, ce sont des ensembles de cas particuliers de la proposition initiale : mais, dans la pratique, nous pouvons traiter le résultat comme étant virtuellement une nouvelle proposition. Un principe non formel d'ingérence doit garantir la légitimité de ce genre de substitutions[2]*.*

[RUS-18], ch. XIV

2.3 La question des problèmes métalogiques

Les problèmes métalogiques classiques, à savoir la non-contradiction du système, sa complétude et l'indépendance de ses axiomes, sont célèbres depuis que Hilbert les a énoncés à propos de la géométrie élémentaire dans ses *Fondements de la géométrie* de 1899.

Ils semblent énoncés explicitement dans le cas de la logique propositionnelle pour la première fois par Russell en 1910 :

L'intérêt d'un système logique est son adéquation et sa cohérence : (1) le système doit embrasser parmi ses déductions toutes les propositions que nous croyons être vraies et capables d'être déduites des principes logiques seuls, bien qu'elles puissent éventuellement requérir quelques limitations de langage ; et (2) le système ne doit pas conduire à des contradictions, c'est-à-dire qu'en poursuivant nos inférences nous ne devons pas être conduit à affirmer à la fois p et non-p, i.e. *« ⊢.p » et « ⊢.∼p » ne doivent pas apparaître à la fois légitimement.*

[WR-10], Introduction, ch. I, Propositions primitives

Dans cette section certaines propositions seront énoncées comme prémisses, et il sera montré qu'elles sont suffisantes pour toutes les formes connues d'inférences. Il ne sera pas montré qu'elles sont toutes nécessaires*, et il est possible que leur nombre puisse être diminué. Tout ce qui est affirmé concernant les prémisses est (1) qu'elles sont vraies, (2) qu'elles sont suffisantes pour la théorie de la déduction, (3) que nous*

2. Ce principe n'est formulé explicitement ni dans *Principia Mathematica*, ni dans l'article de M. Nicod cité plus haut.

> *ne savons pas comment en diminuer le nombre. Mais en ce qui concerne (2), il doit y avoir quelques doutes, puisqu'il est difficile d'être sûr qu'on n'utilisera jamais inconsciemment quelques principes non énoncés. L'habitude d'être guidé rigidement par des règles symboliques formelles est une sauvegarde contre des suppositions inconscientes ; mais cette sauvegarde n'est pas toujours adéquate.*
>
> [WR-10], Part I, Sect. A, Introduction

La non-contradiction ne fait aucun doute à l'époque vu que la logique propositionnelle est une théorie élémentaire bien connue (alors que c'est le problème le plus ardu pour des systèmes axiomatiques comme la Géométrie, l'Arithmétique, etc.). Ce sentiment est renforcé lorsque le système est interprété par la méthode des tables de vérité en 1921 par Post ([POS-21]), et considéré alors comme entièrement résolu, même s'il n'a jamais fait aucun doute.

L'indépendance des axiomes n'a pas une grande importance pour une telle théorie très simple (alors que c'est le problème numéro un pour la Géométrie élémentaire, tout au moins l'indépendance de l'axiome des parallèles). De toute façon on ne voit pas très bien comment traiter ce problème à l'époque. Bernays trouve une méthode dans sa thèse en 1926 ([BER-26]) : généraliser la méthode des tables de vérité en considérant n valeurs de vérité et non plus deux ; il découvre d'ailleurs alors que l'un des axiomes du système de Whitehead et Russell n'est pas indépendant des autres, comme nous l'avons déjà dit plus haut.

Le plus remarquable est l'énoncé du problème de la complétude par Russell : on remarque d'ailleurs que sa peur n'est pas d'oublier des théorèmes logiques, mais de ne pas avoir explicité tous les principes (ce qui est d'ailleurs le cas, car il ne prend pas conscience, comme nous l'avons déjà dit, de l'utilisation soit de la règle de substitution, soit de schémas d'axiomes). Il indique que « les prémisses [...] sont suffisantes pour la théorie de la déduction ». Qu'entend-il par là ? Il est plus clair dans le premier extrait : « Le système doit embrasser parmi toutes ses déductions toutes les propositions que nous croyons être vraies ». C'est assez clair mais non utilisable comme critère. Post donne un critère utilisable en 1921 : le *système* est dit *complet* si, lorsqu'on lui ajoute pour nouvel axiome une proposition non déductible dans ce système, le système obtenu est contradictoire. Post montre alors que le système est bien complet en ce sens.

Nous n'insisterons pas sur ces problèmes car leur résolution exige des méthodes mathématiques, or nous considérons la logique propositionnelle ici comme une partie des fondements des mathématiques. Nous reviendrons sur ces problèmes plus tard, à propos de la logique mathématique (et non plus de la logique élémentaire).