LOGIC COLLOQUIUM '80
D. van Dalen, D. Lascar, J. Smiley (eds.)

MODELES RECURSIVEMENT SATURES DE L'ADDITION ET DE LA MULTIPLICATION DES ENTIERS NATURELS

Patrick CEGIELSKI Kenneth McALOON George WILMERS

U.E.R. de Mathématiques
Université de Paris VII
2, place Jussieu
75 251 PARIS

ABSTRACT

$I\Sigma o$ denotes the subtheory of first-order Peano arithmetic obtained by restricting the induction schema to formulae with only bounded quantifiers. Let EXP denote the corresponding theory obtained by adding to the language a function symbol to denote exponentiation. Let PT denote the naturally axiomatized theory ("Peano with top") corresponding to the structures $(n,+,.)$ for n a natural number. We show that the restriction to addition of a non-standard model of $I\Sigma o$ or of PT and the restriction to multiplication of a segment of a model of EXP closed under $x^{\log x}$ are both recursively saturated. Certain other results concerning PT are included in section III.

INTRODUCTION

Soient $I\Sigma_o$ la sous-théorie de l'arithmétique de Peano obtenue en restreignant le schéma d'axiomes de récurrence aux formules à quantificateurs bornées, EXP la théorie obtenue en ajoutant l'exponentiation et PT la théorie formelle qui correspond aux structures $(n,+,.)$, pour n entier naturel non nul. Alors dans la suite nous démontrons que la restriction à l'addition d'un modèle non standard de $I\Sigma o$ ou de PT et la restriction à la multiplication d'un segment initial clos par $x^{\log x}$ d'un modèle de EXP sont récursivement saturées.

0. RAPPELS

1. Structure récursivement saturée

Soit L un langage du premier ordre; nous notons $\Phi(x)$ un ensemble de formules $\varphi(x)$ de L ayant au plus une variable libre x . $\Phi(x)$ est dite satisfaisable dans la L-structure $\mathfrak{A}$ s'il existe un élément a de A qui satisfait simultanément chaque $\varphi(x)$ de $\Phi(x)$.

Soit $\mathfrak{A}$ une L-structure et X un sous-ensemble de $A = |\mathfrak{A}|$, nous notons L_X le sur-langage de L obtenu en ajoutant une constante c_a pour chaque élément a

de A , et $\mathfrak{A}_X$ l'expansion naturelle de $\mathfrak{A}$ au langage L_X .

Une L-structure $\mathfrak{A}$ est <u>récursivement saturée</u> (cf. [1] , ou [10]) si, et seulement si, pour tout sous-ensemble fini X de A , tout ensemble récursif $\Phi(x)$ de formules de L_X finiment satisfaisable dans $\mathfrak{A}_X$ (c'est-à-dire tel que tout sous-ensemble fini de $\Phi(x)$ est satisfaisable dans $\mathfrak{A}_X$) est satisfaisable dans $\mathfrak{A}_X$.

2. <u>La théorie $I\Sigma o$</u>

L'ensemble des <u>Σo-formules</u> (ou <u>formules à quantifications bornées</u>) est le plus petit sous-ensemble de formules du langage $L = (S,+,.,\leq,0)$ contenant les formules atomiques et clos par négation, disjonction et quantification bornée.

La théorie $I\Sigma o$ (<u>Σo-induction</u>) (cf.[6] , [7] ou [5]) est la théorie du premier ordre de langage L ci-dessus et dont les axiomes propres sont ceux de l'arithmétique de Peano avec le schéma d'axiomes d'induction restreint aux <u>Σo-formules</u>.

Le développement de l'arithmétique élémentaire correspond en fait jusqu'à un certain point assez avancé à $I\Sigma o$, en particulier les théories de l'addition et de la multiplication sont des conséquences de $I\Sigma o$ (cf.[2]). Le <u>principe du débordement</u> pour $I\Sigma o$ s'énonce : soit $\varphi(x)$ une Σo-formule et $\mathfrak{A}$ un modèle non-standard de $I\Sigma o$; si pour tout entier standard n on a : $\mathfrak{A} \models \varphi(n)$, alors il existe un entier non standard α tel que : $\mathfrak{A} \models \varphi(\alpha)$.

Cependant la théorie $I\Sigma o$ est une sous-théorie stricte de PA , en particulier on ne peut pas définir l'exponentiation dans $I\Sigma o$ (cf [6]). $I\Sigma o$ est une théorie incomplète et indécidable, puisque le système Q de Robinson en est conséquence.

3. <u>La théorie EXP</u>

On note EXP la <u>théorie de la Σo-induction avec exponentiation</u>, c'est-à-dire la théorie de langage $L' = (+,.,e,0,1)$, où e est un symbole fonctionnel binaire (appelé <u>exponentiation</u>), et dont les axiomes sont ceux de $I\Sigma o$ (le schéma d'induction se faisant sur les Σo-formules de L' , c'est-à-dire que e peut intervenir) , ainsi que les axiomes suivants (définissants l'exponentiation) :

- $\forall x \ (e(x,o) = 1)$
- $\forall x \ \forall y \ (e(x,y+1) = e(x,y).x)$

On notera x^y au lieu de $e(x,y)$.

EXP est toujours une sous-théorie stricte de l'arithmétique de Peano ([7]), mais on peut y définir la factorielle $x!$, numéroter les nombres premiers p_x (grâce au théorème d'Euclide : $\forall x \ \exists p(\mathbb{P}(p) \wedge x < p)$), définir les valuations p-adiques : $v(p,x)$ désigne le plus grand entier z tel que p^z divise x et si $x \neq 0$ et p

est premier on note $(x)_y$ pour $v(p_y,x)$.
Nous ne démontrons pas ces faits qui ont été trouvés indépendamment par Dimitracopoulos et Cegielski, de manière légèrement différente, et qui ont déjà été exposés par Dimitracopoulos dans sa thèse ([3]).

I. MODELES RECURSIVEMENT SATURES DE L'ADDITION

Théorème 1 : Soit $\mathfrak{A}$ un modèle non standard de $I\Sigma o$ alors la restriction de $\mathfrak{A}$ à l'addition est récursivement saturée.

Démonstration : Soit $\sigma(x,a_1,\ldots,a_k)$ un type récursif de langage $(+)$ et de paramètres $a_1,\ldots,a_k$. Alors, d'après l'élimination des quantificateurs de Presburger pour la théorie de l'addition (cf.[PR]) , et en notant que celle-ci est conséquence de $I\Sigma o$ (cf.[CE]), toute formule $\varphi(x,a_1,\ldots,a_k)$ de σ est une combinaison booléenne de formules atomiques du genre :

$$\frac{n_1a_1 + \ldots + n_ka_k + n}{N} \le x$$

$$\frac{m_1a_1 + \ldots + m_ka_k + m}{M} \ge x$$

et $\quad x \equiv_r s$, (i.e. x congru à s modulo r)

avec $n_1,\ldots,n_k,n,m_1,\ldots,m_k,m \in \mathbb{Z}$, $N, M \in \mathbb{N}^*$, $s \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $s < r$.

D'après la mise sous forme normale des combinaisons booléennes, et en remarquant que la négation d'une formule atomique du genre ci-dessus est équivalente à une disjonction de telles formules atomiques, on a :

$$\varphi(x,a_1,\ldots,a_k) \leftrightarrow$$

$$\bigvee_{0 \le j \le t} \left[\frac{n_{1,j}a_1 + \ldots n_{k,j}a_k + n_j}{N_j} \le x \right.$$

$$(1) \qquad \wedge \frac{m_{1,j}a_1 + \ldots m_{k,j}a_k + m_j}{M_j} \ge x$$

$$\left. \wedge \quad x \equiv_{r_j} s_j \right]$$

en ajoutant si besoin est : $x \ge 0$, $x \equiv_2 0$ ou 1 , $x \le a$, qui sont des formules inactives quant au type, mais permettent d'avoir un schéma uniforme de formules. De plus on peut supposer que

$$a = (k+1)\,\alpha \sup(a_1,\ldots,a_k,\alpha) ,$$

avec α entier non standard.

Soit R la relation $(2k+7)$-aire sur $\mathbb{N}$ définie par :

$R(t,n_1,\dots,n_k,n,N,m_1,\dots,m_k,m,M,r,s)$ si, et seulement si, la formule (1) appartient au type σ , où pour chaque ℓ tel que $1 \le \ell \le k$, n_ℓ code la suite $(n_{\ell,1}, n_{\ell,2}, \dots, n_{\ell,t})$, et de même pour n, N, ...

Cette relation est récursive donc représentable dans $I\Sigma o$ par une Σ_1-formule.

Considérons alors la Σo-formule $\psi(L)$ définie par :

$$\exists x \le a \quad \forall\, t,n_1,\dots,n_k,n,N,m_1,\dots,m_k,m,M,r,s \le L$$
$$\Big[\ \theta'(t,\dots,s) \rightarrow \quad \forall j \le t \quad \forall n_1' \le n_1 \ \dots\ \forall s' \le s$$
$$((\rho'(n_1',j,n_1) \wedge \dots \wedge \rho'(s',j,s)) \rightarrow (x \equiv_{r'} s' \ \wedge$$
$$\frac{n_1'.a_1 + \dots + n_k'.a_k + n'}{N'} \le x \le \frac{m_1'.a_1 + \dots + m_k'.a_k + m'}{M'}))\ \Big]$$

où, bien sûr, $\rho(u',j,u)$ est la Σ_1-formule qui code le fait que $u' = u_j$, et θ' et ρ' sont obtenues à partir de θ et ρ en bornant le quantificateur existentiel par a .

On a $\mathfrak{A} \models \psi(L)$ pour tout L standard, d'après la fini-consistance du type, donc, par débordement, il existe un élément non standard Υ tel que : $\mathfrak{A} \models \psi(\Upsilon)$, et un x correspondant réalise le type. Δ

Remarque : Il suit du théorème 1 que l'addition d'un modèle dénombrable non-standard de $I\Sigma o$ ne peut pas être définie comme une opération récursive sur $\mathbb{N}$. Le théorème 1 permet donc de retrouver cette amélioration de McAloon d'un résultat de Tennenbaum, voir [5] .

II. LA MULTIPLICATION D'UN MODELE NON STANDARD DE EXP EST RECURSIVEMENT SATUREE

Théorème 2. Soit $\mathfrak{A}$ un modèle non standard de EXP, alors la restriction de $\mathfrak{A}$ à la multiplication est récursivement saturée.

Démonstration : En effet, d'après l'élimination des quantificateurs de la théorie de la multiplication ([2]) , une formule $\phi(x,a_1,\dots,a_k)$ du langage (.) est une combinaison booléenne de formules "moléculaires" de la forme :

$$\exists p_1 \dots \exists p_h \ \Big[\bigwedge_{1 \le i < j \le h} p_i \ne p_j \ \wedge \bigwedge_{1 \le i \le h} (\mathbb{P}(p_i) \ \wedge$$
$$\forall j \le t \ \ (\frac{(n_1)_j.v(p_i,a_1) + \dots + (n_k)_j.v(p_i,a_k) + (n)_j}{(N)_j} \le v(p_i,x)$$
$$\wedge \ \frac{(m_1)_j.v(p_i,a_1) + \dots + (m_k)_j.v(p_i,a_k) + (m)_j}{(M)_j} \ge v(p_i,x)$$
$$\wedge \qquad v(p_i,x) \equiv_{(r)_j} (s)_j \ ))\Big]$$

en ajoutant, si besoin est, des formules "inactives" du genre :

$0 \leq v(p,x)$, $v(p,x) \equiv_2 0$ ou 1 , $v(p,x) \leq v(p,a)$, avec

$$a = ((P_{i+\alpha}\,!).a_1.\cdots.a_k)^{\alpha} ,$$

où p_i est le plus grand nombre premier divisant $a_1.\cdots.a_k$, et α est un entier non standard. Alors a est un entier dont toutes les valuations non nulles sont non standards, et telles que :

$$v(p,a) \geq \frac{n_1.v(p,a_1) + \ldots + n_k.v(p,a_k) + n}{N}$$

pour $n_1,\ldots,n_k,N$ entiers standards. De plus il existe une infinité de nombres premiers ne divisant pas le produit des paramètres $a_1,\ldots,a_k$ mais divisant a . (C'est ici qu'intervient le théorie EXP, ayant pour conséquence qu'on peut numéroter les nombres premiers p_i et utiliser la factorielle).

Dans EXP, bien entendu, on peut réécrire la formule moléculaire ci-dessus sous la forme :

$$\exists p \leq a^a \Big[\, p | a^a \wedge \forall i,i' \leq h(i \neq i' \rightarrow (p)_i \neq (p)_{i'})$$
$$\wedge \forall i \leq h(\mathbb{P}((p)_i) \wedge \forall j \leq t(\ldots))\Big] ,$$

que nous noterons :

$$\varphi_{h,t,n_1,\ldots,n_k,N,m_1,\ldots,m_k,m,M,r,s}(x,a_1,\ldots,a_k).$$

Une formule $\psi(x,a_1,\ldots,a_k)$ qui est combinaison booléenne de telles formules $\varphi_{h,\ldots,s}(x)$ va donc s'écrire :

$$\exists i \leq u \quad \forall j \leq (v)_i((\varepsilon)_{i,j} = 1 \rightarrow \varphi_{(h)_{i,j},\ldots,(s)_{i,j}}(x)$$
$$\wedge\ (\varepsilon)_{i,j} = 0 \rightarrow \neg\varphi_{(h)_{i,j},\ldots,(s)_{i,j}}(x))$$

que l'on notera $\Phi_{u,v,\varepsilon,h,t,\ldots,s}(x,a_1,\ldots,a_k)$, où, bien sûr, $(\varepsilon)_{i,j}$ est mis pour $((\varepsilon)_i)_j$.

Soit alors R la relation $(2k+11)$-aire de $\mathbb{N}$ telle que $R(u,v,\varepsilon,h,\ldots,s)$ soit vrai si, et seulement si, la formule $\Phi_{u,\ldots,s}$ appartient au type récursif $\sigma(x,a_1,\ldots,a_k)$ de (.). La relation R est récursive donc représentable dans EXP par une Σ_1-formule θ .

Considérons alors la formule $\psi(L)$:

$$\exists x \leq a \,\big[\mathbf{x} | a \wedge \forall u,v,\varepsilon,\ldots,r,s \leq L\ (\theta'(u,\ldots,s) \rightarrow \Phi_{u,\ldots,s}(x))\big] .$$

Alors cette formule est vérifiée pour tout L entier standard, d'après la fini-consistance du type récursif, donc elle est vérifiée par un entier non-standard (débordement), et le x correspondant vérifie le type. Δ

Remarques : 1°) La restriction à la multiplication du modèle standard n'est pas récursivement saturée, pour le voir il suffit de considérer le type : $n|x$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2°) La restriction à la multiplication d'un modèle de $I\Sigma o$ n'est pas en général récursivement saturée. En effet soit $\mathfrak{A}$ un modèle non standard de Peano, α un élément non standard de $\mathfrak{A}$ et

$$B = \{x \in |\mathfrak{A}| \mid \exists n \in \mathbb{N} \quad x \leq \alpha^n\} ,$$

alors B est stable par addition et multiplication et la L-structure correspondante $\mathfrak{B}$ est un modèle de $I\Sigma o$, mais la restriction de $\mathfrak{B}$ à la multiplication n'est pas récursivement saturée, il suffit de considérer le type : $\alpha^n|x$, pour $n \in \mathbb{N}$.

III. L'ADDITION D'UN MODELE NON-STANDARD DE PT EST RECURSIVEMENT SATUREE

La théorie PT (Peano for Top element) est l'analogue de la théorie PA sauf qu'il existe un plus grand élément α. Pour parler de fonctions on prolonge la fonction successeur par $S\alpha = \alpha$. C'est donc la théorie de langage L avec le schéma d'induction et les axiomes suivants :

- $\forall x \ (Sx \neq 0)$
- $\exists !\, x \ (Sx = x) \ \wedge$ (Cet x est noté α)
- $\forall x \forall y \ ((x \neq \alpha \wedge y \neq \alpha \wedge Sx = Sy) \rightarrow x = y)$
- $\forall x \ (x + 0 = x)$ — $\forall x \forall y \ (x + Sy = S(x + y))$
- $\forall x \ (x.0 = 0)$ — $\forall x \forall y \ (x.(Sy) = x.y + x)$

Les modèles standards de PT sont bien sûr les structures $(n,S,+,.,0)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont modèles de PT on dit que $\mathfrak{A}$ est une extension "finale" de $\mathfrak{A}$ si $\mathfrak{B}^*$ est une extension finale de $\mathfrak{A}^*$, où $\mathfrak{A}^*$ désigne la structure obtenue à partir de $\mathfrak{A}$ en substituant les graphes de + et . aux fonctions elles-mêmes, puis en omettant l'élément maximal.

Lemme (Paris) : Tout modèle $\mathfrak{A}$ de PT admet une extension "finale" $|\mathfrak{B}|$ qui est un modèle de $I\Sigma_o$.

Démonstration : Soit α le plus grand élément de $A = |\mathfrak{A}|$. L'idée est de considérer une numération de base α.

Posons $B = A[X]$, l'ensemble des polynômes formels à coefficients dans A. Les définitions de l'addition et de la multiplication de deux éléments de B se fait suivant les règles classiques en base α, par exemple

$$x = a_o + a_1.X + \ldots + a_n.X^n$$
$$y = b_o + b_1.X + \ldots + b_m.X^m, \qquad \text{avec } m \geq n,$$

alors $$x + y = c_o + c_1.X + \ldots + c_m.X^m + c_{m+1}.X^{m+1},$$

avec :
$$c_o = \begin{cases} a_o + b_o \\ \mu c\ (a_o + b_o + c = \alpha) \end{cases} \qquad r_o = \begin{cases} 0 & \text{si } a_o + b_o < \alpha \text{ dans } \mathfrak{A} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$c_1 = \begin{cases} a_1 + b_1 + r_o \\ \mu c\ (a_1 + b_1 + r_o + c = \alpha) \end{cases} \qquad r_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } a_1 + b_1 + r_o < \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

------------------------------------- etc.

On définit alors Sx comme x+1, et $x \leq y$ si, et seulement si, $\exists z\ (y = x + z)$.

$\mathfrak{B} = (B,S,+,.,\leq,0)$ est alors une L-structure qui vérifie évidemment les axiomes isolés de PA. Montrons que $\mathfrak{B}$ vérifie le schéma d'induction ou plutôt, ce qui lui est équivalent, le principe du bon ordre pour les Σo-formules. Soit $\varphi(x,x_1,\ldots,x_k)$ une Σo-formule de L et $b_1,\ldots,b_k$ des éléments de B tels que :
$\mathfrak{B} \models \exists x \varphi(x,b_1,\ldots,b_k)$, et montrons qu'il existe un plus petit tel x. Soit b tel que : $\mathfrak{B} \models \varphi(b,b_1,\ldots,b_k)$, alors il suffit de montrer que :

$$\mathfrak{B} \models \exists x \leq b\ (\varphi(x,\vec{b}) \wedge \forall y\, (\varphi(y,\vec{b}) \rightarrow x \leq y)).$$

Remarquons que :

$$a'_o + a'_1.X + \ldots + a'_p.X^p \leq a_o + a_1.X + \ldots + a_n.X^n$$

si, et seulement si, $p \leq n$ et (éventuellement avec $a'_{p+1} = \ldots = a'_n = 0$)
$(a'_o,\ldots,a'_n) \leq (a_o,\ldots,a_n)$ pour l'ordre lexicographique inverse.

Alors, puisque φ est une Σo-formule, il existe une formule Ψ telle que pour $c \leq b$ on a, si $c = c_o + c_1.X + \ldots + c_n.X^n$:

$\mathfrak{B} \models \varphi(c,\vec{b})$ si, et seulement si, $\mathfrak{A} \models \Psi(c_o,\ldots,c_n,\vec{a})$, où $\vec{a}$ est le tuplet de tous les coefficients de tous les b_i.

Soit $\Psi'(x_o,\ldots,x_n,\vec{z})$ la formule :

$$\Psi(x_o,\ldots,x_n,\vec{z}) \wedge \forall y_o \ldots \forall y_n\ (\Psi(y_o,\ldots,y_n,\vec{z}) \rightarrow (x_o,\ldots,x_n) \leq (y_o,\ldots,y_n))$$

Posons, dans $\mathfrak{A}$: $a'_n = \mu x_n\ (\exists x_{n-1} \ldots \exists x_o \Psi'\ (x_o,\ldots,x_n,\vec{a}))$

$$a'_{n-1} = \mu x_{n-1}(\exists x_{n-2} \ldots \exists x_o \Psi'\ (x_o,\ldots,x_{n-1},a'_n,\vec{a}))$$

$$a'_o = \mu x_o \Psi'(x_o,a'_1,\ldots,a'_n,\vec{a})$$

Alors $b' = a'_o + a'_1.X + \ldots + a'_n.X^n$ est le plus petit x vérifiant $\varphi(x,b_1,\ldots,b_n)$ dans $\mathfrak{B}$. Δ

Théorème 3 : Soit $\mathfrak{A}$ un modèle non standard de PT, alors la restriction de $\mathfrak{A}$ à l'addition est récursivement saturée.

Démonstration : Soit $\sigma(x,a_1,\ldots,a_k)$ un type récursif consistant de $(A,+)$. Soit $\mathfrak{B}$ une extension "finale" de $\mathfrak{A}$ modèle de $I\Sigma o$. $\mathfrak{B}$ est non standard puisque $\mathfrak{A}$ est non standard. Pour $\varphi(x)$ disjonction de formules de σ on a :

$$\mathfrak{A} \models \exists x\ \varphi(x),$$

d'où : $\mathfrak{B} \models (\exists x \leq \alpha)\varphi'(x)$,

où φ' est obtenue à partir de φ en bornant tous les quantificateurs de φ par α, l'élément maximal de $\mathfrak{A}$, et en remplaçant $x + y = z$ par :

$(z = \alpha$ et $x + y \geq \alpha)$ ou $(z \neq \alpha$ et $x + y = z)$
(S et $\leq$ n'étant pas utilisée dans φ).

Puisque $(B,+)$ est récursivement saturée d'après le théorème 1, il existe un élément b de B satisfaisant le type σ' ainsi défini, mais b est borné par α, donc $b \in A$ et b satisfait le type σ. Δ

Rappelons que l'on appelle arithmétique de Presburger (Pres) la théorie complète de l'addition. Notons Pres Top (pour Presburger with Top element) la théorie de langage $L'' = (S,+,0)$ avec le schéma d'induction et les cinq premiers axiomes de PT.

Lemme : Tout modèle de Pres Top a une extension "finale" qui est modèle de Pres.

Démonstration : Soit $\mathfrak{A} = (A,S,+,0)$ un modèle de Pres Top. Posons :

$$B = \{n.\alpha + \beta \mid n \in \mathbb{N},\quad \beta \in A,\quad \beta < \alpha\}$$

et

$$S(n.\alpha + \beta) = \begin{cases} n.\alpha + S\beta & \text{si } S\beta < \alpha \\ (n+1).\alpha & \text{si } S\beta = \alpha. \end{cases}$$

L'addition est définie par récurrence par les deux derniers axiomes de Pres Top. Alors $\mathfrak{B} = (B,S,+,0)$ est un modèle de Pres. Δ

Lemme : Tout modèle dénombrable et récursivement saturé de Pres Top a une extension "finale" qui est un modèle récursivement saturé et dénombrable de Pres.

Démonstration : (Esquisse) Soit $\mathfrak{A}$ un modèle dénombrable et récursivement saturé de Pres Top. Alors $\mathfrak{A}$ est resplendant et on peut donc supposer que c'est un élément d'un modèle ω-non-standard et dénombrable de ZF, disons $\mathfrak{C}$ (cf,e.g. [10]). En faisant la construction du lemme dans le modèle $\mathfrak{C}$ on obtient une extension "finale" $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ qui est modèle de Pres. Puisque toute structure qui est "élément" d'un modèle ω-non-standard est récursivement saturée, $\mathfrak{B}$ est récursivement saturé. Etant donné que les autres propriétés de $\mathfrak{B}$ sont absolues, $\mathfrak{B}$ est le modèle cherché. Δ

Si $\mathfrak{B}$ est un modèle de $I\Sigma o$ et α un élément de $|\mathfrak{B}|$, notons $(I_\alpha,+)$ le modèle de Pres Top obtenu de façon canonique.

Théorème 4 : Soit $\mathfrak{A}$ un modèle dénombrable de Pres Top. Alors $\mathfrak{A}$ est récursivement saturé si, et seulement si, il existe un modèle dénombrable $\mathfrak{B}$ de $I\Sigma o$ et un élément α de $\mathfrak{B}$ tel que $\mathfrak{A}^* = (I_\alpha,+)$.

Démonstration : Ceci suit le théorème 1, du lemme précédent et des propriétés bien connues des modèles resplendants. Δ

Théorème 5 : Les extensions complètes de la théorie Pres Top sont obtenues en ajoutant les axiomes : $\alpha \equiv_i n_i$,
pour $i \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $n_i \in \{0,1,\dots,i-1\}$. Il y a donc $2^{\aleph_0}$ telles extensions.

Démonstration : Comme pour la théorie de l'addition, on montre que la théorie Press Top permet l'élimination des quantificateurs dans le langage $(+,0,1,\alpha,\leq, (\equiv_i)_{i \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}})$. Le théorème s'en déduit facilement. Δ

Remarque : Ceci permet de voir que Pres Top axiomatise exactement l'ensemble des énoncés vrais dans tous les modèles $(n,+)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons par contre que PT ne démontre pas tous les énoncés vrais dans tous les modèles $(n,S,+,.,0)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

IV. LA MULTIPLICATION D'UN SEGMENT INITIAL NON STANDARD D'UN MODELE DE EXP CLOS PAR $x^{\log x}$ EST RECURSIVEMENT SATUREE

Introduction : En II nous avons vu que la multiplication d'un modèle non standard de EXP est récursivement saturée. Nous allons améliorer ce résultat en démontrant que tout segment initial d'un tel modèle, clos pour $x^{\log x}$, possède une multiplication récursivement saturée.

Définition : Pour $x \neq 0$, $y = [\log x] \leftrightarrow y = \mu z\ (2^{z+1} \geq x)$. (L'existence du logarithme est assurée, par exemple, par le fait que :

$$2^z \geq 2z).$$

Remarques : 1°) Soit $\mathfrak{A}$ un modèle non-standard de EXP et B un segment non standard initial de A clos pour $x^{[\log x]}$, alors B est clos pour $S,+,.$ et $\mathfrak{B} = (B,S,+,.,\leq,0)$ est un modèle de $I\Sigma o$.

2°) Une telle structure $\mathfrak{B}$ n'est pas un modèle de EXP en général, parce que non close pour l'exponentiation. En effet soit $\mathfrak{A}$ un modèle non-standard de EXP, α un élément non-standard de A et :

$$B = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \quad x \leq \alpha^{[\log \alpha]^n}\}.$$

Alors B est clos pour $y^{[\log y]}$. Mais B n'est pas clos pour l'exponentiation, car :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \alpha^\alpha > \alpha^{[\log \alpha]^n}.$$

(Ceci suit de ce que dans $\mathbb{N}$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\log x)^n}{x} = 0).$$

3°) Une telle structure $\mathfrak{B}$ n'est donc pas non plus en général close pour la factorielle, car :

$$(2x)! > x^x.$$

Théorème 6 : Soit $\mathfrak{A}$ un modèle non standard de EXP et B un segment initial non standard de $\mathfrak{A}$, clos pour $x^{[\log x]}$, alors $(B,.)$ est récursivement saturé.

Démonstration : Posons $\mathfrak{B} = (B,S,+,.,\leq,0)$.

La démonstration se fait comme pour le théorème 2 avec la même formule $\psi(L)$ appliquée au modèle $\mathfrak{A}$, mais il faut borner x par un élément de B, et donc le a considéré au théorème 2 ne convient plus ici, puisque $\mathfrak{B}$ n'est pas en général clos pour factoriel. On avait vu que a devait être de la forme : $(a'.a_1. \ldots . a_k)^\alpha$, avec α non standard, a' divisible par une infinité de nombres premiers ne divisant pas le produit $a_1 . \dots . a_k$. Il suffit donc de trouver un tel a' car alors on considérera $a'' = a'.a_1 . \dots . a_k$, et $a = a''^{[\log a'']}$.

Lemme : $EXP \vdash \forall x\, \exists p\, (\mathbb{P}(p) \wedge x < p < 2x)$.

(C'est le célèbre théorème de Tchebychev. Pour se convaincre qu'il est bien conséquence de EXP, il suffira de regarder la démonstration "élémentaire" de Sierpinski ([9])).

Corollaire : Soit $\mathfrak{A}$ un modèle non standard de EXP, β un entier non standard, alors il y a une infinité de nombres premiers entre β et β^2.

(En effet, d'après le lemme, il existe q_1 entre β et 2β, q_2 entre 2β et $2^2\beta$,..., q_n entre $2^n\beta$ et $2^{n+1}\beta$,...).

- Posons $\beta = a_1 . \dots . a_k$, alors il existe $a' \leq (\beta^2)^{[\log \beta^2]}$ divisible par une infinité de nombres premiers ne divisant pas β :

posons $\varphi(n) = \exists x \leq (\beta^2)^{[\log \beta^2]}\, \exists p[\, \forall i\, \forall j\, (i \neq j \rightarrow (p)_i \neq (p)_j)$

$$\wedge\ \forall i \leq n\ (\mathbb{P}((p)_i) \wedge \neg((p)_i \mid \beta) \wedge (p)_i \mid x)]$$

pour tout n standard on a : $\mathfrak{A} \models \varphi(n)$, car $x = q_1 . \dots . q_n$ convient (les q_i étant ceux de la démonstration du corollaire précédent), puisque :

$$x \leq q_n^n \leq (\beta^2)^n \leq (\beta^2)^{[\log \beta^2]},$$

d'où, par débordement, il existe α non standard tel que : $\mathfrak{A} \models \varphi(\alpha)$, il suffit alors de prendre comme a' un x correspondant.

(Remarquons que le p correspondant n'appartient pas à B en général). Δ

Remarque : Dans le théorème 6, on peut remplacer la clôture du segment initial pour $x^{\log x}$ par d'autres types de clôture, par exemple pour x^α, α entier non standard donné, ou $x^{f(x)}$ avec $f(x)$ non standard pour x non standard.

Problèmes ouverts : 1°) La restriction à la multiplication d'un modèle de $I\Sigma o + \forall x\, \exists y\, (y = x^{[\log x]})$ est-elle récursivement saturée ?

2°) (Wilkie) A-t-on

$I\Sigma o + \forall x\, \exists y\, (y = x^{[\log x]}) \vdash \forall x\, \exists p\, (\mathbb{P}(p) \wedge p > x)$?

3°) $I\Sigma o$ est-elle finiment axiomatisable ? Notons que le premier auteur a démontré que la théorie de la multiplication est conséquence d'un nombre fini d'axiomes de $I\Sigma o$, ce qui répond à une question de Bruno Poizat.

4°) La restriction à la multiplication d'un modèle non-standard de PT est-elle récursivement saturée ?

5°) Peut-on axiomatiser l'ensemble des énoncés vrais dans toutes les structures (n,.), n entier non nul ?

REFERENCES

[1] J. Barwise, J. Schlipf, "Recursively saturated and resplendent models", Journal of Symbolic Logic 41, 1976, p. 531-536.

[2] P. Cegielski, Théorie élémentaire de la multiplication, thèse de troisième cycle, Université Paris VI, 25 mars 1980 ; résumé dans C. R. Ac. Sc. Paris, t. 290 (2 juin 1980), Sér. A, p. 935-938.

[3] C. Dimitracopoulos, Matijasevic's theorem and fragments of Arithmetic, thèse, Université de Manchester, Avril 1980.

[4] H. Lessan, Models of arithmetic, thèse, Université de Manchester, Fevrier 1978.

[5] K. McAloon, "On the complexity of models of arithmetic", (à paraître in Journal of Symbolic Logic).

[6] R. Parikh, "Existence and feasibility in arithmetic", Journal of Symbolic Logic 36, 1971, p. 494-508.

[7] J.B. Paris, L.A.S. Kirby, "Σ_n-collection schemas in arithmetic", Logic Colloquium' 77, pp. 199-209, North-Holland, Amsterdam.

[8] M. Presburger, Comptes Rendus du ler Congrés des Mathématiciens des Pays Slaves, Varsovie, 1930, p. 92-101.

[9] W. Sierpinski, 250 problems of elementary number theory, P.W.N., Warsawa, 1970 ; tr. fr. Hachette, Paris, 1972.

[10] G. Wilmers, Non-standard models and their application to model theory, thèse, Université d'Oxford, 1975.