Logique/*Logic*

La théorie des corps inductifs archimédiens rationnellement complets

Patrick CEGIELSKI

Résumé — Nous appelons théorie des corps inductifs archimédiens rationnellement complets la théorie logique du premier ordre dont le langage est celui des anneaux ordonnés augmenté d'un prédicat unaire, distinguant un sous-ensemble de l'ensemble de base, et dont les axiomes sont ceux des corps totalement ordonnés, plus les axiomes élémentaires pour que le sous-ensemble distingué ressemble à celui des entiers, y compris que cet ensemble n'est pas borné dans le corps, plus la convergence de toute suite rationnelle définissable de Cauchy [ce qui se dit dans ce langage], et enfin le schéma d'axiomes d'induction sur les formules du langage complet.

Je démontre que cette théorie n'est pas une extension conservative de l'Arithmétique de Peano, et plus exactement que les théorèmes sur les entiers dans cette théorie sont ceux de l'arithmétique du second ordre.

The theory of archimedean rationally complete inductive fields

Abstract — *By theory of archimedean rationnally complete inductive fields, we mean the first order theory with language that of ordered rings extended by unary predicate, and with the following axioms: axioms for a totally ordered field, the familiar ordered semiring axioms of natural integers for the subset determined by the unary predicate; this subset is not bounded in the field; every Cauchy definable rational sequence has a limit; the inductive scheme for every formula.*

We prove that this theory is not a conservative extension of Peano Arithmetic, and that the properties on its integers are exactly those provable in second order arithmetic.

INTRODUCTION. — Nous avons démontré que la théorie des corps inductifs archimédiens réels-clos est une extension conservative de l'Arithmétique de Peano **PA** (*cf.* Cegielski [1]). Nous allons démontrer ici que les propriétés du premier ordre des entiers des corps inductifs archimédiens dans lesquels toute suite rationnelle définissable de Cauchy converge [ce qui se dit dans la théorie des corps industifs], sont les mêmes que celles de l'Arithmétique du second ordre Z_2. En particulier la théorie de ces corps est une extension conservative de Z_2 mais non de **PA**.

1. L'*Arithmétique de Peano* **PA** est la théorie égalitaire du premier ordre de langage $L(\mathbf{PA}) = \{S, +, ., 0\}$, où S est une application, + et . des opérations binaires, 0 un élément distingué, et vérifiant les six axiomes simples habituels et le schéma d'axiomes d'induction pour toutes les formules du langage (*cf.* Cegielski [1]).

Soit T une théorie du premier ordre (éventuellement multibases) de langage $L(T)$ contenant $\{+, ., 0, 1, \mathbf{N}\}$, avec **N** prédicat unaire. A toute formule φ du langage $L(\mathbf{PA})$, on peut associer une formule φ' de $L(T)$ en remplaçant Sx par $x+1$, et les quantificateurs par des quantificateurs relativisés à **N**. L'*arithmétique de* T, notée Arith (T), est la théorie de langage $L(\mathbf{PA})$ dont les énoncés θ vrais sont ceux pour lesquels θ' est conséquence de T. La théorie T est une *extension* de **PA** si, et seulement si, $\mathrm{Arith}(\mathbf{PA}) \subseteq \mathrm{Arith}(T)$. C'est une *extension conservative* de **PA** si, et seulement si, $\mathrm{Arith}(T) = \mathrm{Arith}(\mathbf{PA})$.

L'*Arithmétique du second ordre* Z_2 est la théorie égalitaire du premier ordre à deux bases **N** et $\mathscr{P}$ de langage $L(Z_2) = \{S, +, ., 0, \in\}$, extension de $L(\mathbf{PA})$ où $\in$ une relation de **N** dans $\mathscr{P}$, et vérifiant les mêmes axiomes que **PA** sauf que le schéma d'axiomes d'induction est maintenant valable pour toutes les formules de $L(Z_2)$, plus les axiomes suivants, en notant, comme dans toute la suite, les variables de **N** par des minuscules et

Note présentée par Gustave CHOQUET.

0764-4442/90/03110847 $ 2.00

celles de $\mathscr{P}$ par des majuscules :

(Axiome d'extensionnalité) : $\forall X, Y (\forall x (x \in X \Leftrightarrow x \in Y) \Rightarrow X = Y)$,

(Axiomes de compréhension) : Pour toute formule $\varphi(x, \mathbf{y})$ de $L(Z_2)$ on a : $\forall \mathbf{y}, \exists X, \forall x (x \in X \Leftrightarrow \varphi(x, \mathbf{y}))$.

Rappelons que Z_2 est une extension non conservative de **PA** (Folklore, *cf.* Shoenfield [3], p. 230, pour quelques explications).

On appelle *corps inductif archimédien* toute structure $\mathscr{K} = (K, +, ., 0, \leqq, \mathbf{N})$ telle que :

1° $(K, +, ., \leqq, 0)$ est un corps commutatif totalement ordonné;

2° $\mathbf{N}$ est un prédicat unaire vérifiant :

(*a*) $\mathbf{N}(0)$;

(*b*) $\forall x (\mathbf{N}(x) \Rightarrow \mathbf{N}(x+1))$;

(*c*) pour toute formule du langage $\underline{L(K)} = (+, ., 0, \leqq, \mathbf{N})$ on a :

$$\mathscr{K} \vDash \forall \mathbf{y} ((\varphi(0, \mathbf{y}) \wedge \forall x ((\mathbf{N}(x) \wedge \varphi(x, \mathbf{y})) \Rightarrow \varphi(x+1, \mathbf{y})) \Rightarrow \forall x (\mathbf{N}(x) \Rightarrow \varphi(x, \mathbf{y}))).$$

(*d*) $\forall x \in K, \exists n \in \mathbf{N} (x \leqq n)$.

Dans toute la suite de 1 on considère un corps inductif archimédien $\mathscr{K}$.

LEMME 1. — 1° *L'ensemble* $\mathbf{N}_{\mathscr{K}} = \{ x \in K \mid \mathbf{N}(x) \}$ *des* entiers *de ce corps est stable pour* $+$ *et* $.$, *et la structure* $(\mathbf{N}_{\mathscr{K}}, +1, +, ., \leqq)$ *est un modèle de* **PA**.

2° *En posant* $\underline{\mathbf{Z}_{\mathscr{K}}^-} = \{ -n \mid n \in \mathbf{N} \}$, *l'ensemble* $\underline{\mathbf{Z}_{\mathscr{K}}} = \mathbf{Z}_{\mathscr{K}}^- \cup \mathbf{N}_{\mathscr{K}}$ *des* entiers relatifs *de ce corps est un sous-anneau commutatif unitaire totalement ordonné. Tout élément de* $\mathbf{Z}$ *s'écrit, de façon unique,* $-n$ *ou* 0 *ou* n, *avec* $n \in \mathbf{N}^*$.

3° *L'ensemble* $\underline{\mathbf{Q}_{\mathscr{K}}} = \{ x \in K \mid (\exists p, q \in \mathbf{Z}) (q . x = p) \}$ *des* rationnels *de ce corps est un sous-corps inductif. Tout élément* r *de* $\mathbf{Q}$ *s'écrit, de façon unique :* $r = 0$ *ou* $r = p/q$ *ou* $r = -p/q$, *avec* $p, q \in \mathbf{N}^*$, $p \wedge q = 1$.

4° *On a*: $\forall x, \exists ! k \in \mathbf{Z} (k \leqq x < k+1)$. *Ce* k *s'appelle la* partie entière *de* x *et se note* $\mathrm{Int}(x)$. *Alors* $\mathbf{Q}$ *est dense dans* K, i. e. : $\forall a, b, \exists r \in \mathbf{Q} (a < b \Rightarrow a < r < b)$.

LEMME 2. — *On appelle* suite *de ce corps* $\mathscr{K}$ *tout élément* u *de* $K^{\mathbf{N}}$ (*et non de* $K^{\mathbb{N}}$). *On définit la* suite identité, *les* suites constantes, *l'*addition, *la* multiplication par un scalaire, *la* multiplication, *le* quotient. *Alors* $(K^{\mathbf{N}}, +, ., \times)$ *est une* K-*algèbre associative, commutative, unitaire, non intègre.*

On dit que la *suite* (u_n) *converge* vers $l \in K$ si, et seulement si : $\forall \varepsilon \in K^{+*}, \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N} : n \geqq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$. On définit de même les *suites de Cauchy, minorées, majorées, bornées.*

Si (u_n) et (v_n) convergent vers l et l' respectivement, et si $\lambda \in K$, alors $(u_n) + (v_n)$ et $\lambda . (u_n)$ convergent, vers $l + l'$ et $\lambda . l$ respectivement. On a la compatibilité entre limite et relation d'ordre et le théorème de l'encadrement (mais non le résultat sur le produit, car on ne peut pas démontrer qu'une suite convergente est bornée).

LEMME 3. — *Une* suite rationnelle (u_n) *de* $\mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ *est* K-définissable *si, et seulement si, il existe une* L(K)-*formule* $\varphi(n, x, \mathbf{y})$ *et* $\mathbf{c} \in K^m$ *tels que :* (*a*) $\mathscr{K} \vDash \forall n \in \mathbf{N}, \exists ! x \varphi(n, x, \mathbf{c})$; (*b*) $\mathscr{K} \vDash \forall n \in \mathbf{N} \varphi(n, u_n, \mathbf{c})$.

On notera $\underline{\mathrm{Déf}_{\mathscr{K}}(\mathbf{Q}^{\mathbf{N}})}$ l'ensemble des suites rationnelles définissables de $\mathscr{K}$.

1° $\mathrm{Déf}_{\mathscr{K}}(\mathbf{Q}^{\mathbf{N}})$ est une sous-algèbre unitaire de $(\mathbf{Q}^{\mathbf{N}}, +, ._{\mathbf{Q}}, \times)$ et toute suite rationnelle de Cauchy définissable est bornée. L'ensemble $\underline{\text{C-Déf}_{\mathscr{K}}(\mathbf{Q}^{\mathbf{N}})}$ des suites rationnelles définissables de Cauchy est une sous-algèbre unitaire de $(\mathbf{Q}^{\mathbf{N}}, +, ._{\mathbf{Q}}, \times)$.

2° Pour tout rationnel a et tout entier n il existe une suite rationnelle définissable $\underline{a^n}$ vérifiant : $a^0 = 1$, $a^{n+1} = a^n . a$. De même on peut parler des *séries rationnelles* : étant donnée la suite rationnelle définissable (u_n), il existe une suite rationnelle définissable (S_n) vérifiant $S_0 = u_0$, $S_{n+1} = S_n + u_n$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ la limite éventuelle de la suite (S_n).

3° (*Caractérisation par les parties entières*) : On a :

$$\forall a \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \forall x, y \quad (\forall n \in \mathbf{N} (\mathrm{Int}(a^n . x) = \mathrm{Int}(a^n . y)) \Rightarrow x = y).$$

Un *corps inductif* archimédien $\mathscr{K}$ est dit *rationnellement complet* si, et seulement si, toute suite rationnelle définissable de Cauchy converge. On notera ARCIF (pour « archimedean rationnally complete inductive field ») la théorie de ces corps.

2. Théorème 1. — Z_2 *est interprétable dans la théorie des corps inductifs rationnellement complets.*

■ Soit $(\mathbf{R}, +, ., \leqq, \mathbf{N})$ un modèle de la théorie des corps inductifs rationnellement complets. On notera

$$\mathbf{N} = \{x \in \mathbf{R} \mid \mathbf{N}(x)\} \quad \text{et} \quad \underline{\mathscr{P}} = \{x \in [0, 1[\mid (\forall n \in \mathbf{N})(\mathrm{Int}(3^{n+1} . x) \not\equiv 2 [\mathrm{mod}. 3])\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des *réels* de $[0, 1[$ dont aucun chiffre du développement triadique n'est égal à 2. Pour $n \in \mathbf{N}$ et $X \in \mathscr{P}$ notons $n \in X$ si, et seulement si, $\mathrm{Int}(2^{n+1} . X) \equiv 1 [3]$. Montrons que $(\mathbf{N}, S, +, ., \mathscr{P}, \in)$ est un modèle de Z_2, où $S n = n + 1$.

Nous avons déjà vu que $(\mathbf{N}, S, +, .)$ est un modèle de **PA** et on a l'induction pour toutes les formules de l'arithmétique du second ordre (puisque ce sont des formules particulières du langage initial). L'extensionnalité résulte du lemme 3, 3°. Démontrons la compréhension et même plus généralement que si $\varphi(n, \mathbf{y})$ est une formule de $L(K)$ et $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^m$ alors il existe $X \in \mathscr{P}$ tel que : $n \in X \Leftrightarrow \varphi(n, \mathbf{c})$.

La formule $[\varphi(n, \mathbf{c}) \wedge r = 1/3^{n+1}] \vee [\neg \varphi(n, \mathbf{c}) \wedge r = 0]$ permet de considérer une suite rationnelle définissable (r_n). La série associée (s_n) est de Cauchy car, si $n \leqq p$, alors $|s_p - s_n| \leqq 1/2 . 3^{n+1}$. Elle converge donc vers un réel X. De plus $0 \leqq r_n \leqq 1$ donc, d'après la compatibilité entre limite et relation d'ordre, $X \in [0, 1]$. Pour $n \in \mathbf{N}$ et $p \geqq n$ on a $3^{n+1} . s_n \in \mathbf{N}$ et $\mathrm{Int}(3^{n+1} . X) \equiv 3^{n+1} . r_n [3]$. D'où $X \in \mathscr{P}$ et $n \in X$ si, et seulement si, $\varphi(n, \mathbf{c})$. ■

Théorème 2. — *La théorie des corps inductifs archimédiens rationnellement complets est une extension non conservative de l'Arithmétique de Peano.*

3. Théorème 3. — Arith (ARCIF) = Arith (Z_2).

■ T 1 nous montre que Arith (ARCIF) est une extension de Arith (Z_2). Il reste à construire un modèle de ARCIF à partir d'un modèle de Arith (Z_2) ou, ce qui revient au même, d'un modèle de Z_2.

Soit $(\mathbf{N}, \mathscr{P}, S, +, ., \in)$ un modèle de Z_2. Alors il existe $\mathscr{Q} = (\mathbf{Q}, \mathscr{P}', +, ., \leqq, \mathbf{N}, \in)$ tel que : $(\mathbf{Q}, +, ., \leqq)$ soit un corps commutatif totalement ordonné; $(\mathbf{N}, +, ., \leqq)$ soit isomorphe à $(\mathbf{N}_{\mathscr{Q}}, +, ., \leqq)$, avec $\mathbf{N}_{\mathscr{Q}} = \{x \in \mathbf{Q} \mid \mathbf{N}(x)\}$; tout élément r de $\mathbf{Q}$ s'écrive, de façon unique : $r = -p/q$ ou 0 ou p/q, avec $p, q \in \mathbf{N}^*$, $p \wedge q = 1$; $(\mathscr{P}', \in)$ vérifie l'axiome d'extensionnalité; (*Induction*) pour toute formule paramétrée $\varphi(x, \mathbf{y})$ du langage $L(\mathscr{Q})$ on a :

$$\mathscr{Q} \models \forall \mathbf{y} ((\varphi(0, \mathbf{y}) \wedge \forall x \in \mathbf{N} (\varphi(x, \mathbf{y}) \Rightarrow \varphi(x+1, \mathbf{y})) \Rightarrow \forall x (\mathbf{N}(x) \Rightarrow \varphi(x, \mathbf{y})));$$

(*Compréhension*) : pour toute formule paramétrée $\varphi(x, \mathbf{y})$ du langage $L(\mathscr{Q})$ on a :

$$\mathscr{Q} \models \forall \mathbf{y}, \quad \exists X, \quad \forall x (x \in X \Leftrightarrow \varphi(x, \mathbf{y})).$$

A tout n-uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbf{N}$, avec n standard, on sait associer son *code* $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ dans $\mathbf{N}$, par exemple grâce à la fonction β de Gödel. A tout élément b de $\mathbf{Q}$, ensemble de base de $\mathcal{Q}$, on associe l'entier (non standard) : $\underline{\tilde{b}} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, avec $b_i \in \mathbf{N}$, $b_3 \neq 0$, $b = (-1)^{b_1}.(b_2/b_3)$. On notera $\underline{\tilde{\mathbf{Q}}}$ l'ensemble de ces codes. Une *suite rationnelle* $(r_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ est $\underline{\mathbf{Q}}$*-définissable* si, et seulement si, il existe $X \in \mathcal{P}$ tel que :

$$\vDash \forall x \in X, \ \exists n \in \mathbf{N}, \ \exists b \in \tilde{\mathbf{Q}} (x = \langle n, b \rangle); \qquad \vDash \forall n \in \mathbf{N}, \ \exists ! x \in X, \ \exists b \in \tilde{\mathbf{Q}} (x = \langle n, b \rangle);$$
$$\vDash \forall n \in \mathbf{N} (\langle n, \tilde{r}_n \rangle \in X).$$

On notera $\underline{\text{Déf}(\mathbf{Q}^{\mathbf{N}})}$ l'ensemble des suites rationnelles $\mathbf{Q}$-définissables de $\mathcal{Q}$. Alors Déf$(\mathbf{Q}^{\mathbf{N}})$ est une sous-algèbre unitaire de $(\mathbf{Q}^{\mathbf{N}}, +, ._{\mathbf{Q}}, \times)$. Pour toute suite rationnelle $\mathbf{Q}$-définissable $(r_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et tout entier $N \in \mathbf{N}$, la suite *finie au sens du modèle* $(r_n)_{n \leqq N}$ est bornée. Toute suite rationnelle $\mathbf{Q}$-définissable de Cauchy est bornée. L'ensemble $\underline{\text{C-Déf}(\mathbf{Q}^{\mathbf{N}})}$ des suites rationnelles $\mathbf{Q}$-définissables de Cauchy est une sous-algèbre unitaire de $(\mathbf{Q}^{\mathbf{N}}, +, ._{\mathbf{Q}}, \times)$. Pour des suites rationnelles (a_n) et (b_n) on notera $(a_n) \equiv (b_n)$ si, et seulement si : $\forall \varepsilon \in \mathbf{Q}^{+*}, \exists N \in \mathbf{N} (n > N \Rightarrow |a_n - b_n| < \varepsilon)$; on définit ainsi une relation d'équivalence sur Déf$(\mathbf{Q}^{\mathbf{N}})$. On note $\underline{\text{Déf}(\mathbf{R})} = \text{C-Déf}(\mathbf{Q}^{\mathbf{N}})/\equiv$ (l'ensemble des *réels définissables*) et on définit les opérations habituelles, l'ensemble Déf$(\mathbf{R}^+)$ (des *réels* définissables *positifs*) par $[a_n] \in \text{Déf}(\mathbf{R}^+)$ si, et seulement si, $(a_n) \equiv (0)$ ou $\exists \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N} (n > N \Rightarrow a_n > \varepsilon)$; et $x \leqq y$ si, et seulement si, $y - x \in \text{Déf}(\mathbf{R}^+)$. La structure $(\text{Déf}(\mathbf{R}), +, ., \leqq)$ est un corps commutatif totalement ordonné. L'application de $\mathbf{Q}$ dans Déf$(\mathbf{R})$, qui à q associe la classe de la suite rationnelle $\mathbf{Q}$-définissable de Cauchy constante à q, est un monomorphisme de corps ordonnés. Nous considérerons désormais que $\mathbf{Q}$, et donc $\mathbf{N}$, est inclus dans Déf$(\mathbf{R})$. Toute suite rationnelle $\mathbf{Q}$-définissable de Cauchy converge dans le corps Déf$(\mathbf{R})$, vers le réel qu'elle définit. Tout réel définissable est donc limite d'une suite $\mathbf{Q}$-définissable de rationnels et ce corps est archimédien.

Déf$(\mathbf{R})$ est inductif : soit $\varphi(n, \mathbf{x})$ une formule de $L(\mathcal{Q})$. Elle est équivalente à une formule de la forme : $(Q_1 x_{m+1}, \ldots, Q_q x_{m+q}) \theta (x_1, \ldots, x_m, n, x_{m+1}, \ldots, x_{m+q})$, avec θ ouverte. Alors cette formule est équivalente à une formule sur les rationnels en remplaçant x_i pour $1 \leqq i \leqq m$ par « l'ensemble » X_i qui le représente, tout quantificateur $Q_i x_i$ par le quantificateur de même nature relativisé à une suite rationnelle $\mathbf{Q}$-définissable, et chaque formule atomique remplacée par la sous-formule adéquate, par exemple pour $x_i = x_j^2$ par :

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{Q}^{+*}, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N}, \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad \forall r, s \in \mathbf{Q}$$
$$((k > N_\varepsilon \wedge \langle k, \tilde{r} \rangle \in X_i \wedge \langle k, \tilde{s} \rangle \in X_j) \Rightarrow |r - s^2| < \varepsilon).$$

D'où le résultat.

En utilisant la même idée on montre que toute suite rationnelle Déf$(\mathbf{R})$ définissable est $\mathbf{Q}$-définissable. Alors toute suite rationnelle Déf$(\mathbf{R})$-définissable de Cauchy converge. ■

Note remise le 14 mai 1990, acceptée le 11 juillet 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] P. CEGIELSKI, La théorie des corps réels-clos inductifs est une extension conservative de l'arithmétique de Peano, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 310, série I, 1990, p. 239-242.

[2] P. CEGIELSKI, *La théorie des corps inductifs archimédiens rationnellement complets est une extension conservative de l'Arithmétique de Peano du second ordre*, Rapport du Laboratoire d'Informatique Théorique et Programmation n° 90-31, 15 p., Université Paris-VII, 1990.

[3] J. R. SHOENFIELD, *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, vii + 344 p., 1967.

12 bis, *rue Paul-Éluard*, 93200 *Saint-Denis*
et *Laboratoire d'Informatique théorique et Programmation*,
Université Paris-VII, 2, *place Jussieu*, 75251 *Paris Cedex* 05.