Examen de théorie des graphes – 1^{ere} session – 2009-2010

Correction

1. (3 points) *Soit G un graphe non orienté connexe simple dont les sommets sont $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Les deux parcours de G (en profondeur et en largeur) respectant l'ordre alphabétique des sommets donnent dans l'ordre de visite les deux listes de sommets suivantes* :

- (profondeur) a, e, f, d, b, c, g
- (largeur) a, e, f, g, d, c, b

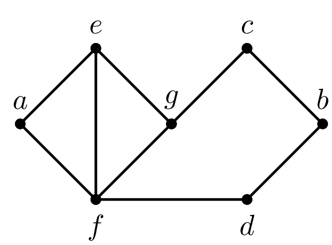
Dessiner G (il peut y avoir plusieurs solutions, une seule est demandée)

D'après le parcours en profondeur, les arêtes suivantes sont interdites : $ab, ac, ad, eb, ec, ed, fb$.

Donc on a les arêtes suivantes ae, ef ou af, fd.

D'après le parcours en largeur, les fils de e venant avant les fils de f on a nécessairement eg puis fd (car on n'a pas ed). Mais on ne peut pas avoir fc car c vient après d. Donc on a nécessairement gc pas gb puis db.

Une solution est



G

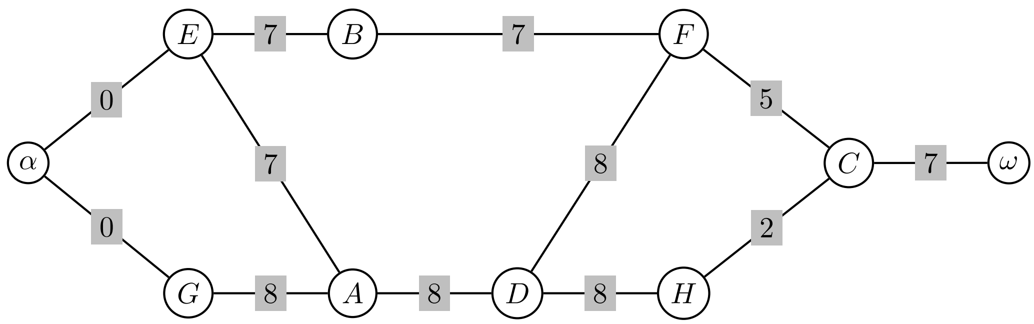
2. (6 points) Un projet informatique a été découpé en 8 sous-programmes A, B, C, D, E, F, G, H. Les contraintes de précédence et les durées de développement de ces sous-programmes sont données dans le tableau suivant

sous-programme	durée	sous-programmes précédents
A	8	G, E
B	7	E
C	7	F, H
D	8	A
E	7	
F	5	D, B
G	8	
H	2	D, A

2.1 *Modélisez ce projet par un graphe. Déterminez la durée minimale du projet, les dates au plus tôt, dates au plus tard des différents sous-programmes. Quels sont les "sous-programmes" critiques ?*

On introduit les sommets fictifs α de début et ω de fin.

On classe les sommets par ordre de rang croissant ce qui donne le graphe suivant :

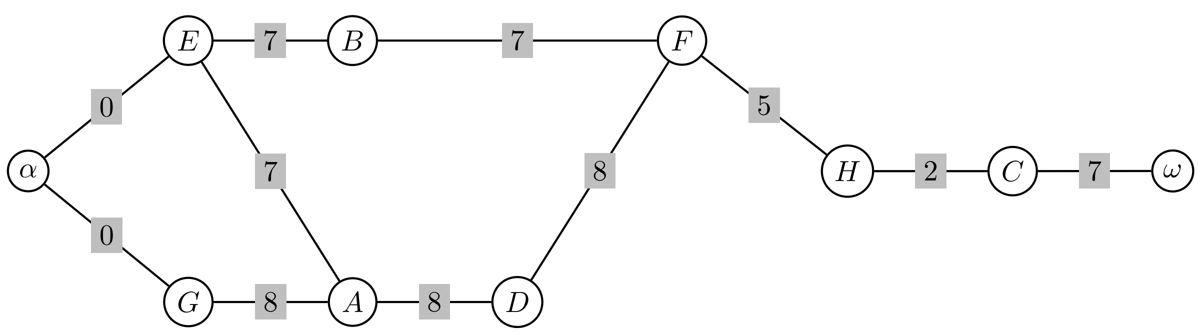


On calcule les dates au plus tôt en parcourant le graphe de α vers ω et au plus tard en reculant de ω vers α.

	E	G	A	B	D	F	H	C	ω
date au plus tôt	0	0	8	7	16	24	24	29	36
date au plus tard	1	0	8	17	16	24	27	29	36

Le projet dure au minimum 36 unités de temps et les sous-programmes critiques sont G, A, D, F, C.

2.2 *On se rend finalement compte que le sous-programme H a besoin des résultats du sous-programme F. Quelle sera alors la durée minimale du projet ?*

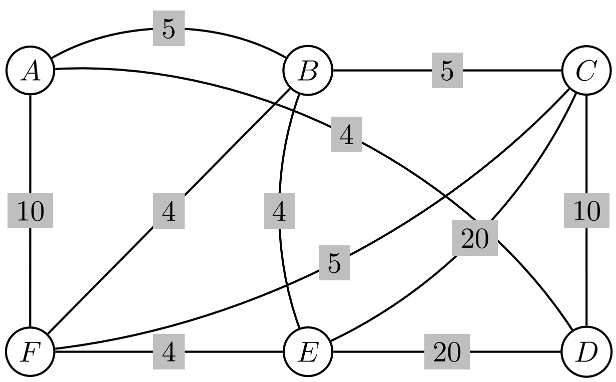


La durée minimale du projet est alors de 38 unités de temps.

3. (6 points) *Dans le graphe $\mathcal{G}$, les sommets sont des PC et les valeurs des arêtes représentent les* ***débits*** *des liaisons en* Mo/s *que l'on suppose identiques en vitesse montante et descendante. Le sommet A ou le sommet B peut être choisi comme serveur principal pour distribuer des données. Déterminez le meilleur choix en déterminant celui qui minimise* ***le temps moyen de transfert*** *d'un fichier de 100* Mo *depuis le serveur vers* ***tous les autres PC****. (Vous préciserez l'algorithme utilisé)*

On transforme le graphe en attribuant aux arêtes le temps de transfert d'un fichier de 100Mo entre deux PC selon le débit des liaisons. Puis on applique deux fois le même algorithme de plus court chemin pour minimiser le temps de transfert depuis soit A soit B. On peut utiliser Dijkstra ou Bellman puisque les arêtes sont pondérées par des valeurs positives.

Cela donne le graphe pondéré suivant :



$\mathcal{G}$

Depuis A on a les temps de transfert minimaux suivants:

A	B	C	D	E	F	$\mathfrak{C}$
0	5	∞	4	∞	10	A
0	5	14	4	24	10	A, D
0	5	10	4	9	9	A, D, B
0	5	10	4	9	9	A, D, B, E
0	5	10	4	9	9	A, D, B, E, F
0	5	10	4	9	9	A, D, B, E, F, C

Depuis A on a un temps de transfert moyen de $(5 + 10 + 4 + 9 + 9)/5 = 7,4s$

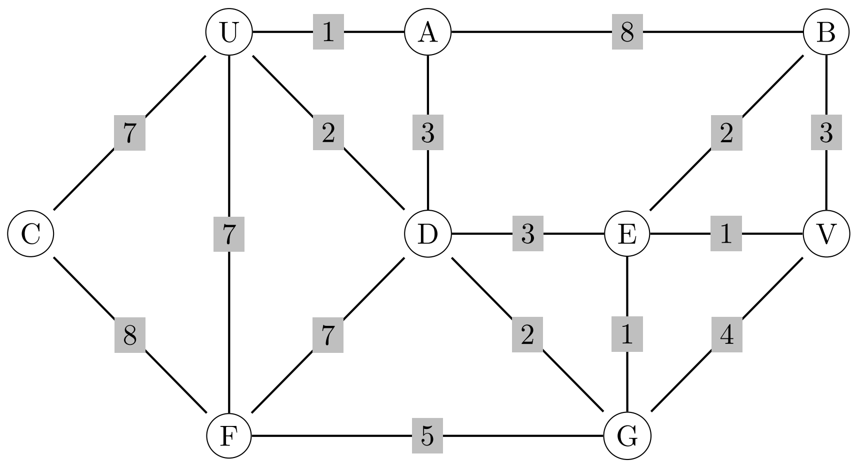
Depuis B on a les temps de transfert minimaux suivants:

A	B	C	D	E	F	$\mathfrak{C}$
5	0	5	∞	4	4	B
5	0	5	24	4	4	B, E
5	0	5	24	4	4	B, E, F
5	0	5	9	4	4	B, E, F, A
5	0	5	9	4	4	B, E, F, A, C
5	0	5	9	4	4	B, E, F, A, C, D

Depuis B on a un temps de transfert moyen de $(5 + 5 + 9 + 4 + 4)/5 = 5,4s$

Donc B est un meilleur choix.

4. (5 points) *On veut construire un réseau avec un coût minimum pour relier 9 commutateurs. Les coûts de câblage sont donnés par le graphe $\mathcal{H}$. Suite à une décision politique les liaisons câblées UC et VG sont imposées. Déterminer alors un câblage à coût minimal respectant ces contraintes. (Vous préciserez l'algorithme utilisé et son adaptation au cas précis de l'exercice.)*



$\mathcal{H}$

On va adapter l'algorithme de Kruskal : il suffit d'initialiser l'ensemble des arêtes choisies non pas à l'ensemble vide mais à $\{UC, VG\}$. Puis on classe les arêtes restantes par ordre de coût croissant et l'algorithme se déroule de la façon habituelle, l'ensemble des arêtes choisies ne devant pas contenir de cycle.

Dans l'ordre sont choisies les arêtes suivantes : $UC, VG, UA, VE, UD, DG, EB, GF$.